Anwendung
der
Grassmann'schen Ausdehnungslehre
auf die
Geometrie
der
Kreise in der Ebene.

Inaugural-Dissertation

der

Naturwissenschaftlichen Facultät

der

Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

zur

Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt von

Rudolf Mehmke

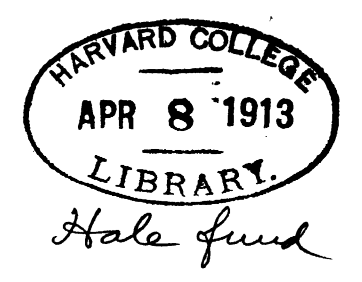
aus Lauterberg a. Harz.



STUTTGART.

Druck der E. Greiner'schen Hofbuchdruckerei Greiner & Pfeiffer.

1880.


HARVARD COLLEGE
APR 8 1913
LIBRARY.
Hale fund

Seinen lieben Eltern

aus Dankbarkeit gewidmet

vom Verfasser.

In der vorliegenden Arbeit ist der Versuch gemacht, einen Theil der in Grassmann's Ausdehnungslehre enthaltenen Methoden und Principien in freier Weise auf die Geometrie der Kreise in der Ebene anzuwenden. Den Anstoss dazu gaben die Nr. 394 ff. der Ausdehnungslehre von 1862.

Die hier eingeführte Multiplication von Kreisen entspricht der «inneren» Multiplication Grassmann's. In einer bereits begonnenen Fortsetzung dieser Arbeit denkt der Verfasser auch die Anwendung der «äusseren» Multiplication auf die Kreisgeometrie zu zeigen und mit Hilfe derselben namentlich die Theorie der Kreisbüschel und Netze weiter auszuführen. Von Anwendungen auf specielle Probleme sind nur eine beschränkte Anzahl mitgetheilt; dieselben werden vielleicht genügen, um einigermassen einen Einblick in die Technik der Ausdehnungslehre zu gewähren, soweit sie hier in Anwendung kommt. Der Verfasser behält sich vor, eine Anwendung der hier gegebenen Methoden auf die Steiner'sche Verallgemeinerung des Malfattischen Problems und einige andere Probleme zu veröffentlichen.

Man bemerke, dass die Entwickelungen in dieser Arbeit grossentheils eine viel allgemeinere Bedeutung haben, als auf den ersten Blick scheinen möchte. Die hier benützten Methoden und Begriffe bedürfen nur weniger Abänderungen, um nicht allein für die Theorie der Systeme ebener Kegelschnitte, welche einen festen Kegelschnitt doppelt berühren, sondern auch für die Theorie der entsprechenden Curvensysteme auf Flächen von constanter Krümmung, sowie diejenige der Systeme ebener Curven auf beliebigen Flächen zweiten Grades verwendbar zu sein. Ferner kann man dieselben Principien auf die Geometrie der Kugeln im Raume oder allgemeiner der Flächen zweiten Grades, welche eine

feste Fläche zweiten Grades nach ebenen Curven berühren, anwenden. Seine Untersuchungen hierüber hofft der Verfasser ebenfalls in nicht zu ferner Zeit veröffentlichen zu können.

Nicht unerwähnt möge bleiben, dass der Verfasser einige Theile dieser Arbeit mit seinem verehrten Freunde Dr. Franz Meyer besprochen hat und demselben hinsichtlich der Darstellung einigen Rath verdankt.

Es sind folgende Abkürzungen gebraucht:

A$_1$ bedeutet die «lineale Ausdehnungslehre» von Grassmann, Leipzig 1844; neugedruckt 1877.

A$_2$ die «Ausdehnungslehre» desselben Verfassers, Berlin 1862.

H bezeichnet Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, Leipzig 1867.

Abschnitt I.

Addition. Multiplication mit Zahlgrössen. Lineare Abhängigkeit.

§. 1.

Addition und Subtraction von Kreisen. Multiplication und Division derselben durch Zahlgrössen.

Alle quadratischen Functionen zweier rechtwinkligen Coordinaten x und y, welche die Gestalt haben

$$p\,(x^2 + y^2) + q\,y + r\,y + s,$$

also gleich Null gesetzt die Gleichungen von Kreisen liefern und desshalb «Kreisfunctionen» genannt werden können*), bilden ein in sich geschlossenes System, insofern durch lineare Combination von mehreren «Kreisfunctionen» immer eine Function derselben Art entsteht.

Wir übertragen die Addition und die daraus abgeleiteten Operationen der Subtraction sowie der Multiplication und Division mit Constanten von den Kreisfunctionen auf die durch dieselben vorgestellten Kreise selbst. Das heisst wir bezeichnen einen Kreis C als die Summe oder Differenz zweier Kreise A und B und schreiben dementsprechend

$$C = A + B, \text{ resp. } C = A - B,$$

wenn die zu C gehörige Kreisfunction die Summe resp. Differenz der zu A und B gehörigen Kreisfunctionen ist; ferner nennen wir einen Kreis B das Product resp. den Quotienten aus einem Kreise A und einer Zahlgrösse (Constanten) α und schreiben

$$B = \alpha . A\,, \text{ resp. } B = \frac{A}{\alpha}\,,$$

wenn die entsprechende Gleichung zwischen den zu B und A gehörigen Kreisfunctionen stattfindet.

---

*) Wie dies z. B. bei Grassmann geschieht, A_2 No. 394.

Es folgt aus den soeben gemachten Definitionen unmittelbar, dass für die Addition und Subtraction von Kreisen sowie die Multiplication und Division derselben durch Zahlgrössen die gleichen Gesetze bestehen, wie für die gewöhnliche algebraische Addition und Subtraction, resp. Multiplication und Division.

Man bemerke, dass die Kreise A und $\alpha . A$ oder $\frac{A}{\alpha}$ wohl in allen ihren Punkten zusammenfallen, ihrem Werthe nach aber dennoch als verschieden aufgefasst werden müssen, weil jeder von ihnen, mit einem beliebigen dritten Kreise vereinigt, einen andern Kreis zur Summe ergiebt.

§ 2.

Lineare Abhängigkeit von Kreisen.

Wenn zwischen mehreren Kreisen $A_1, A_2 \ldots A_m$ eine lineare Gleichung der Form

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k A_k = 0$$

stattfindet, wo die α_k beliebige Zahlgrössen und nicht alle Null sind, so sagt man, jene Kreise stehen in linearer Beziehung. Zwei oder mehrere Kreise heissen linear unabhängig, wenn zwischen ihnen keine lineare Beziehung herrscht. Man sagt ferner, ein Kreis A sei aus einer Reihe von Kreisen $A_1, A_2 \ldots A_n$ linear abgeleitet, wenn er in der Form dargestellt werden kann:

$$A = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A_k,$$

wo die α_k Zahlgrössen bedeuten.

(Vergl. A_2; 1; 2; 392.)

§ 3.

Satz. Zwischen fünf beliebigen Kreisen besteht immer eine lineare Beziehung, oder anders ausgedrückt, fünf beliebige Kreise sind stets linear abhängig von einander.

Beweis. Es seien $A_1, A_2 \ldots A_5$ fünf beliebige Kreise und

$$f_k = p_k (x^2 + y^2) + q_k + r_k y + s_k$$

sei die zu A_k gehörige Kreisfunction. Es lassen sich nun bis auf einen un-

bestimmten, aber allen gemeinschaftlichen Factor fünf Zahlgrössen α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_5$ bestimmen, welche den vier Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} o &= \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_5 p_5 \\ o &= \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \ldots + \alpha_5 q_5 \\ o &= \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \ldots + \alpha_5 r_5 \\ o &= \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \ldots + \alpha_5 s_5 \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $(x^2 + y^2)$, x, y, 1, und addirt, so kommt:

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_5 f_5 = o.$$

Hieraus folgt (§ 1)

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_5 A_5 = o,$$

d. h. zwischen den Kreisen $A_1, A_2 \ldots A_5$ besteht in der That eine lineare Beziehung.

Zwischen weniger als fünf Kreisen besteht nur in besonderen Fällen eine lineare Beziehung; mehr als fünf Kreise geben stets Anlass zu mehreren linearen Beziehungen.

§ 4.

Satz. Jeder beliebige Kreis lässt sich aus vier beliebigen linear unabhängigen Kreisen stets und nur auf eine Weise linear ableiten. (Vergl. A_2, 395.)

Beweis. Es sei A der Kreis, welcher aus den linear unabhängigen, sonst aber beliebigen Kreisen $A_1 \ldots A_4$ linear abgeleitet werden soll. Zwischen den fünf Kreisen $A, A_1 \ldots A_4$ besteht nothwendig eine lineare Beziehung. (§ 3.) Dieselbe sei:

$$\alpha' A + \alpha'_1 A_1 + \ldots \alpha'_4 A_4 = o.$$

Es folgt hieraus, wenn man

$$-\frac{\alpha'_k}{\alpha'} = \alpha_k \text{ setzt}$$

$$(k = 1, \ldots 4),$$

$$A = \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_4 A_4,$$

womit der erste Theil des Satzes bewiesen ist. Obige Darstellung wird nur dann unmöglich, wenn $\alpha' = o$ ist, in welchem Falle aber, gegen die Voraussetzung, zwischen $A_1 \ldots A_4$ eine lineare Beziehung, nämlich

$$\sum_{k=1}^{4} \alpha'_k A_k = o$$

herrschte.

Liesse sich A noch unter einer andern Form darstellen, etwa

$$A = \beta_1 A_1 + \ldots + \beta_4 A_4,$$

so hätte man

$$(\alpha_1 - \beta_1) A_1 + \ldots + (\alpha_4 - \beta_4) A_4 = o,$$

woraus wegen der linearen Unabhängigkeit von $A_1 \ldots A_4$, nothwendig folgt

$$\alpha_1 = \beta_1, \ldots \alpha_4 = \beta_4.$$

Also ist der Satz vollständig bewiesen.

Abschnitt II.

Multiplication.

§ 5.

Multiplication von Kreisen.

Die Discriminante der zu einem beliebigen Kreise A gehörigen Kreisfunction

$$f = a(x^2 + y^2) + 2 a_1 x + 2 a_2 y + a_3$$

ist

$$\triangle = \begin{vmatrix} a & o & a_1 \\ o & a & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -a(a_1^2 + a_2^2 - a a_3).$$

Nach einem bekannten Satze hat $\triangle$, als Discriminante, Invarianteneigenschaft; ihr Werth bleibt also bei einer Transformation des gegebenen Coordinatensystems in irgend ein anderes rechtwinkliges Coordinatensystem — vorausgesetzt, dass die Achsen des letzteren ähnlich zu einander liegen, wie die entsprechenden Axen des ursprünglichen Systems — ungeändert, weil der Modul einer solchen Transformation gleich der positiven Einheit ist.*) Nun ändert sich auch, wie man aus der analytischen Geometrie weiss*), der Coefficient (a) des Gliedes $(x^2 + y^2)$ in der Kreisfunction f nicht, wenn man an Stelle des ursprünglichen Co-

*) S. z. B. Salmon-Fiedler, Anal. Geometrie der Kegelschnitte, 4. Aufl. Art. 83.

ordinatensystems ein beliebiges anderes rechtwinkliges System einführt. Folglich ist der Werth der Grösse

$$1)\quad a_1^2 + a_2^2 - a a_3 = -\frac{\Delta}{a}$$

ebenfalls von der Wahl des Coordinatensystems unabhängig. Es sei jetzt B ein beliebiger zweiter Kreis und

$$g = b\,(x^2 + y^2) + 2 b_1\, x + 2 b_2\, y + b_3$$

die zugehörige Kreisfunction. Bildet man den zu 1) analogen Ausdruck für die Kreisfunction $f + \lambda g$, nämlich

$$(a_1 + \lambda b_1)^2 + (a_2 + \lambda b_2)^2 - (a + \lambda b)\,(a_3 + \lambda b_3) =$$
$$(a_1^2 + a_2^2 - a a_3) + 2\lambda \left\{ a_1 b_1 + a_2 b_2 - \tfrac{1}{2}\,(a b_3 + a_3 b) \right\}$$
$$+ \lambda^2\,(b_1^2 + b_2^2 - b b_3)$$

so bleibt dessen Werth nach dem eben Bemerkten, wie man auch die Grösse λ annehmen möge, durch eine Transformation des Coordinatensystems unbeeinflusst. Daher müssen die Coefficienten der einzelnen Potenzen von λ dieselbe Eigenschaft besitzen, woraus insbesondere folgt, dass der Werth des Ausdrucks

$$a_1\, b_1 + a_2\, b_2 - \tfrac{1}{2}\,(a b_3 + a_3\, b)$$

von der Lage des Coordinatensystems unabhängig ist.*) Der vorstehende Ausdruck soll, in Anbetracht dass er allein von der Lage und gegenseitigen Beschaffenheit der Kreise A und B abhängig ist, durch das Symbol

$$A\,B$$

bezeichnet werden:

$$2)\quad A B = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 - \tfrac{1}{2}\,(a b_3 + a_3 b)$$

Setzt man hierin $B = A$, so kommt man auf den Ausdruck in 1) zurück:

$$A A = a_1^2 + a_2^2 - a a_3 = -\frac{\Delta}{a}.$$

Es ist $A B$ sowohl in Bezug auf die Grössen a, a_1, a_2, a_3 als die Grössen b, b_1, b_2, b_3 vom ersten Grade und ändert seinen Werth nicht, wenn man die einen mit den andern vertauscht.

Hieraus folgt, wenn α eine beliebige Zahlgrösse bedeutet:

$$3)\quad \alpha.\,(A B) = (\alpha.\,A)\,B = A\,(\alpha.\,B)$$

und ferner

$$4)\quad A B = B A.$$

---

*) Vergl. über diese in der Invariantentheorie häufig angewandte Schlussweise z. B. Salmon-Fiedler, Algebra der linearen Transformationen; Art. 123.

Ist C ein beliebiger dritter Kreis, zu welchem die Kreisfunction

$$c(x^2 + y^2) + 2c_1 x + 2c_2 y + c_3$$

gehört, so hat man gemäss der Definition in Gl. 2)

$$(A + B) C = (a_1 + b_1) c_1 + (a_2 + b_2) c_2 - \frac{1}{2} \{(a + b) c_3 + (a_3 + b_3) c\}$$
$$= \{a_1 c_1 + a_2 c_2 - {}^1/_2 (a c_3 + a_3 c)\} + \{b_1 c_1 + b_2 c_2 - \frac{1}{2} (b c_3 + b_3 c)\}$$

oder

$$5)\quad (A + B) C = A C + B C$$

Wegen Gl. 4) ist auch

$$6)\quad C (A + B) = (A + B) C = A C + B C = C A + C B,$$

und wenn D einen beliebigen vierten Kreis bezeichnet:

$$7)\quad (A + B) (C + D) = A C + B C + A D + B D.$$

Die Gleichungen 5), 6) und 7) lehren uns, dass die Operation, vermöge welcher zwei beliebige Kreise A und B, als getrennte Objecte, zu einem neuen Object, nämlich der Zahlgrösse A B verknüpft werden, mit der in § 1 definirten Addition von Kreisen durch das Gesetz der Distributivität verbunden ist, also zu jener Klasse von Operationen gehört, welche den Namen Multiplicationen führen. (S. A_1 § 9; H. § 7.)

Dies berechtigt uns, umsomehr als A B nur von der Beschaffenheit und gegenseitigen Lage von A und B abhängt, die Grösse A B das Product der beiden Kreise A und B zu nennen.

§ 6.

Bemerkungen über das Product zweier Kreise.

Gleichung 4) in § 5 zufolge findet bei der in jenem § gelehrten Multiplication Vertauschbarkeit der Factoren statt, so dass dieselbe in ihren Gesetzen grosse Aehnlichkeit mit der gewöhnlichen algebraischen Multiplication zeigt. Dennoch besteht ein wesentlicher Unterschied: Das Product A B ändert nicht nothwendig seinen Werth, wenn einer der Factoren sich ändert, und es kann desshalb auch A B verschwinden, ohne dass einer der Factoren Null wäre. (Vgl. H, Seite 70.) Es besteht dagegen folgender Satz: Wenn stets, wie auch der Kreis B angenommen werden möge, das Product A B verschwindet, so ist nothwendig

$$A = 0.$$

Denn soll für jeden Werth der Grössen b, b_1, b_2, b_3

$$A B = a_1 b_1 + a_2 b_2 - \frac{1}{2} (a b_3 + a_3 b) = 0$$

sein, so muss man haben

$$a = a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

Also ist

$$A = o.$$

Das Product zweier Kreise, deren entsprechende Kreisfunctionen lauter reelle Coefficienten besitzen, ist eine reelle Zahlgrösse. Da jeder Kreis offenbar auf die Form einer Summe

$$A + i \,.\, B \qquad (i = \sqrt{-1})$$

gebracht werden kann, wo A und B Kreise mit reeller zugehöriger Kreisfunction sind, so kann man sich im Allgemeinen auf die Betrachtung von Kreisen der letzteren Art beschränken.

§ 7.

Ausartungen.

Es sei A ein beliebiger Kreis, dessen zugehörige Kreisfunction, durch Einführung einer Hilfsveränderlichen t homogen gemacht, die Gestalt haben möge:

$$f = a\,(x^2 + y^2) + 2\,a_1\,xt + 2\,a_2\,yt + a_3\,t^2.$$

Das Verschwinden der Discriminante

$$\Delta = -\,a\,(a_1^2 + a_2^2 - aa_3) = -\,a\,.\,AA$$

von f bildet die nothwendige und ausreichende Bedingung für die Zerlegbarkeit jener Function in zwei lineare Functionen. Daher hat man: Soll ein Kreis in ein Geradenpaar ausarten, so muss entweder das Product desselben mit sich selbst oder der Coefficient des Gliedes $(x^2 + y^2)$ in der zugehörigen Kreisfunction Null sein, und umgekehrt, wenn eine dieser Grössen verschwindet, so zerfällt der Kreis nothwendig in ein Geradenpaar. Man kann drei Hauptfälle unterscheiden, entsprechend der Möglichkeit, dass entweder bloss A A, oder bloss a, oder beide Grössen gleichzeitig Null sind. Sei zunächst

$$AA = o, \quad a \gtrless o.$$

Wie jeder Kreis, so muss auch das Geradenpaar A die sog. imaginären Kreispunkte, d. h. die Schnittpunkte der unendlich fernen Geraden

$$t = o$$

mit dem imaginären Geradenpaar

$$x^2 + y^2 = (x + i\,y)\,(x - i\,y) = o$$

enthalten und da $a \gtrless o$, so kann die unendlich ferne Gerade nicht zum Geradenpaar A gehören. Folglich muss A aus zwei getrennten imaginären Geraden bestehen, von welchen jede einen der imaginären Kreispunkte enthält. Zur Abkürzung wollen wir künftig jede einen

imaginären Kreispunkt enthaltende Gerade eine Kreispunktlinie nennen.

Ist
$$a = o,$$
so gehört die unendlich ferne Gerade zum Geradenpaar, aus welchem A alsdann besteht.

Das Product A A wird in diesem Falle:
$$AA = a_1^2 + a_2^2.$$

Dasselbe verschwindet, vorausgesetzt dass $a_1 \gtrless o$, dann und nur dann, wenn
$$a_2 = \pm\, i\, a_1$$
ist, d. h. wenn die Kreisfunction von A die Gestalt hat
$$t\,\{2 a_1 (x \pm i y) + a_3\, t\},$$
oder wenn die zweite Gerade, welche ausser der unendlich fernen zum Geradenpaar A gehört, eine Kreispunktlinie ist. Wenn endlich noch ausser
$$a = o \text{ und } AA = o$$
$$a_1 = o$$
wird, so geht die gegebene Kreisfunction über in
$$a_3\, t^2$$
d. h. A besteht aus der doppelt zu denkenden unendlich fernen Geraden. Für letztere Gerade, zur Kreisfunction $-2t^2$ gehörig gedacht, führen wir als feste Bezeichnung den Buchstaben U ein. Mit Benützung der unendlich fernen Geraden kann den bisherigen Ergebnissen eine andere Fassung ertheilt werden. Setzt man nämlich in der Definitionsgleichung für das Product A B (Gl. 2) § 5)
$$B = U, \text{ d. h. } b = b_1 = b_2 = o,\ b_3 = -2,$$
so kommt
$$AU = a.$$

Also hat man
$$\Delta = -\,AU\,.\,AA.$$

In Worten: Die Discriminante der zu einem beliebigen Kreise gehörigen Kreisfunction besteht aus zwei Factoren, von welchen der eine gleich dem Product des Kreises mit sich selbst, der andere gleich dem Product des Kreises mit der (doppelt zu denkenden) unendlich fernen Geraden U ist. Man bemerke weiter, dass die unendlich ferne Gerade mit jeder endlichen*) Geraden das Product Null giebt und dass es keinen andern

*) Das heisst genauer gesprochen mit jedem in eine endliche und die unendlich ferne Gerade zerfallenden Kreise. Des einfacheren Ausdrucks wegen soll nämlich, wie auch sonst gebräuchlich, von einem derartigen uneigentlichen Kreise nur der endliche Theil berücksichtigt werden.

Kreis von dieser Eigenschaft giebt. Denn wenn A eine Gerade ist, so hat man in der That

$$a \equiv AU = o.$$

Wenn umgekehrt ein Kreis B mit jeder Geraden A das Product Null liefern soll, so muss für jeden Werth der Grössen a, a_2, a_3

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 - \tfrac{1}{2} a_3 b = o$$

sein. Diess ist bloss der Fall, wenn

$$b = b_1 = b_2 = o$$

ist, oder B in die doppelt zu denkende unendlich ferne Gerade ausartet.

Berücksichtigt man die vorhergehenden Bemerkungen, so gestalten sich jetzt die Kriterien zur Entscheidung der Art eines gegebenen Kreises wie folgt:

Ein beliebiger Kreis A ist ein eigentlicher Kreis, wenn weder das Product AA, noch das Product AU verschwindet; derselbe zerfällt in zwei verschiedene, nicht durch denselben imaginären Kreispunkt gehende Kreispunktlinien, wenn

$$AA = o, \quad AU \gtrless o$$

ist; wenn AU = o ist, so besteht er aus [der unendlich fernen zusammen mit] einer endlichen Geraden, welche Kreispunktlinie ist oder nicht, je nachdem man

$$AA = o, \text{ oder } AA \gtrless o$$

hat, dagegen aus der (doppelt zu rechnenden) unendlich fernen Geraden, wenn ausser AA und AU auch das Product von A mit jeder beliebigen endlichen Geraden Null ist.

§ 8.

Einfache Punkte, Punktepaare, Doppelpunkte.

Eine Kreispunktlinie soll positiv oder negativ heissen, je nachdem sie den imaginären Kreispunkt

$$\begin{cases} x + iy = o \\ t = o \end{cases} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} x - iy = o \\ t = o \end{cases}$$

enthält. Jede Kreispunktlinie besitzt einen und nur einen reellen Punkt. Denn ist z. B.

$$p(x + iy) + q = o$$

die Gleichung einer solchen und

$$-\frac{q}{p} = \alpha + i\beta,$$

so sind offenbar α und β die einzigen reellen Werthe von x und y, welche jener Gleichung genügen.

Man kann zwei Kreispunktlinien conjugirt nennen, wenn sie ungleichnamig sind, aber denselben reellen Punkt enthalten.

Ein uneigentlicher Kreis A, der aus einem Paare ungleichnamiger Kreispunktlinien besteht, hat nach dem Vorhergehenden zwei reelle Punkte und dieses Punktepaar soll als Stellvertreter jenes uneigentlichen Kreises angesehen werden. Vertauscht man beide Kreispunktlinien mit ihren conjugirten, so entsteht ein Kreis $\bar{A}$, dessen reelles Punktepaar mit demjenigen von A zusammenfällt. Um dennoch beide zu unterscheiden, ist es nöthig anzugeben, durch welchen der beiden Punkte beim einen oder andern Paar die positive Kreispunktlinie hindurchgeht. Wir nennen die uneigentlichen Kreise A und $\bar{A}$ resp. die sie ersetzenden Punktepaare conjugirt. Die zu $\bar{A}$ gehörige Kreisfunktion geht aus der von A hervor, wenn man in letzterer überall $+ i$ durch $- i$ ersetzt. Es werden daher A und $\bar{A}$ identisch, d. h. $A = \bar{A}$ besteht aus einem Paar conjugirter Kreispunktlinien, oder mit andern Worten, das reelle Punktepaar, welches A repräsentirt, geht in einen reellen Doppelpunkt über, sobald die Kreisfunction von A reell ist. Wenn ein Kreis in die unendlich ferne Gerade zusammen mit einer Kreispunktlinie ausartet, so soll der reelle (einfache) Punkt jener Kreispunktlinie als Repräsentant des ganzen uneigentlichen Kreises angesehen werden.

Um die einfachen Punkte auch äusserlich von den Doppelpunkten zu unterscheiden (welch letztere als Repräsentanten von Kreisen dienen, die in ein Paar conjugirter Kreispunktlinien mit jenem Doppelpunkt als einzigem reellen Bestandtheil zerfallen sind), wollen wir die Doppelpunkte mit grossen lateinischen, die einfachen Punkte dagegen mit deutschen Buchstaben bezeichnen, und zwar ohne nähere Kennzeichen oder mit einem horizontalen Strich (z. B. $\bar{\mathfrak{P}}$), je nachdem die den einfachen Punkt enthaltende Kreispunktlinie positiv oder negativ ist. Zwei einfache Punkte $\mathfrak{P}$ und $\bar{\mathfrak{P}}$, welche der Lage nach zusammenfallen, aber sich durch Verschiedenheit der Art der sie enthaltenden Kreispunktlinien unterscheiden, sollen conjugirt heissen.

§ 9.

Gewicht eines Kreises.

Gewicht eines Kreises nennen wir die positive Quadratwurzel aus dem Product desselben mit sich selbst.*)

Das Gewicht eines Punktepaars, eines Doppelpunktes sowie eines einfachen Punktes würde sich nach obiger Definition gleich Null ergeben, weil die eben angeführten uneigentlichen Kreise, mit sich selbst multiplicirt, ein verschwindendes Product liefern (§ 8).

Wir lassen jedoch für diese Ausnahmefälle eine andere Bestimmung eintreten. Wir setzen das Gewicht eines zu einem Punktepaar oder Doppelpunkt ausgearteten Kreises gleich dem Product desselben mit U (oder, was nach § 8 dasselbe ist, gleich dem Coefficienten des Gliedes $(x^2 + y^2)$ in der zugehörigen Kreisfunction).

Auf die einfachen Punkte ist auch die vorhergehende Bestimmung nicht mehr anwendbar, weil dieselben mit U stets das Product Null ergeben. Wir führen deshalb eine Fundamentalgerade L von beliebiger, aber fest angenommener Richtung und dem Gewicht 1 ein und bezeichnen dann als Gewicht eines einfachen Punktes das Product desselben mit der Geraden L.

Wenn die unendlich ferne Gerade nicht in der Form U, sondern

$$V = \alpha . U$$

erscheint (also die zugehörige Kreisfunction in der Form $\alpha . (-2 t^2)$, so nennen wir α das Gewicht derselben.**)

Man hat den Satz: Ein Kreis wird mit einer Zahlgrösse multiplicirt, indem man sein Gewicht mit jener Zahlgrösse multiplicirt. Denn es sei zunächst A ein eigentlicher Kreis oder eine Gerade mit dem Gewicht p, α eine beliebige Constante und $B = \alpha . A$.

Dann ist

$$BB = \alpha^2 . AA.$$

---

*) Diese Definition entspricht derjenigen des «numerischen Werths» einer extensiven Grösse, welche Grassmann in A_2 No. 151 giebt. Dadurch, dass man jeden Kreis mit einem „Gewicht", d. h. mit einem bestimmten Zahlcoefficienten versieht, der der Vergrösserung und Verkleinerung fähig ist, und zwei Kreise nur dann einander gleich setzt, wenn sie nicht allein sich geometrisch vollkommen decken, sondern auch gleiche Gewichte besitzen, wird der Kreis vom blossen geometrischen Gebilde zum Rang einer Grösse erhoben. Vgl. d. Schlussbemerkung § 1.

**) Alle diese Bestimmungen sind an und für sich willkürlich, aber aus Gründen der Zweckmässigkeit gemacht worden. Sie dienen dazu, dem Product zweier Kreise mit dem Gewicht 1 in allen Fällen eine möglichst einfache geometrische Bedeutung zu geben.

Gemäss der Definition des Gewichtes ist aber

$$p^2 = A\,A, \text{ also}$$
$$B\,B = \alpha.^2\, p^2,$$

d. h. das Gewicht von B hat den Werth $\alpha.$ p. Ist dagegen A ein Punktepaar oder ein Doppelpunkt, so hat man

$$p = A\,U.$$

Durch Multiplication der Gleichung

$$B = \alpha\,.\,A$$

mit U erhält man aber

$$B\,U = \alpha\,.\,A\,U = \alpha\,.\,p.$$

Folglich ist das Gewicht von B auch in diesem Fall gleich α . p. Wenn A ein einfacher Punkt ist, so braucht man in dem vorhergehenden Beweis nur die Fundamentalgerade L an die Stelle von U zu setzen, um zu demselben Ergebniss zu kommen. Wenn endlich A die mit beliebigem Gewicht versehene unendlich ferne Gerade ist, so geht der Satz unmittelbar aus der Definition des Gewichts derselben hervor.

§ 10.

Product zweier Kreise vom Gewicht 1.

Abgesehen von den einfachen Punkten und Punktepaaren als Repräsentanten ausgearteter Kreise mit zugehöriger complexer Kreisfunction sollen hier nur Kreise mit reeller Kreisfunction betrachtet werden, also eigentliche Kreise mit reellem Mittelpunkt und reellem oder rein imaginärem Halbmesser, Doppelpunkte und Geraden. Es ist nöthig, einige Bemerkungen über Zeichenbestimmung u. s. w. hier einzuschalten. Ein reeller eigentlicher Kreis kann von dem ihn erzeugenden Punkte in zweierlei Richtung beschrieben werden. Wir bezeichnen diejenige als die positive, bei deren Einhaltung ein auf dem Kreisumfang vorwärts schreitender Beobachter den Kreismittelpunkt stets zur Linken behält. Die entsprechende Drehungsrichtung soll als positive bei der Messung von Winkeln zu Grunde gelegt werden.

Der Tangente in irgend einem Punkt eines Kreises geben wir zur positiven Richtung diejenige, in welcher ein den Kreis in positivem Sinn beschreibender Punkt das Linienelement durchläuft, welches Kreis und Tangente gemeinschaftlich haben. Ist bei einer Geraden eine bestimmte von ihren beiden Richtungen als die positive festgesetzt, so ertheilen wir dem Abstande eines Punktes von der Geraden das positive Vorzeichen dann und nur dann, wenn jener Punkt so liegt, dass man bei einem

Fortschreiten auf der Geraden in positiver Richtung den Punkt stets zur Linken hat.

Schneiden sich zwei reelle eigentliche Kreise K und K_1 mit den Halbmessern r und r_1 und den Mittelpunkten M und M_1 in einem Punkte P, so ist ihr Schnittwinkel bei P, d. h. der in positivem Sinn gemessene Winkel, welchen die positiven Richtungen der in P an K und K_1 gezogenen Tangenten einschliessen, gleich dem in positivem Sinn gemessenen Winkel der Strecken P M und P M_1. Der Winkel beider Kreise in ihrem zweiten Schnittpunkt P^1 ist die Ergänzung ihres Winkels bei P zu 2π. Welchen von beiden Winkeln man als Schnittwinkel der beiden Kreise bezeichnen mag, der cos desselben ist stets ausgedrückt durch

$$\frac{r^2 + r_1^2 - d^2}{2 r r_1}$$

wo d den Abstand M M_1 bedeutet. Wenn die Kreise K und K_1 sich nicht reell schneiden, oder wenn einer derselben, oder beide, reellen Mittelpunkt aber rein imaginären Halbmesser besitzen, so soll gerade die Gleichung

$$\cos \gamma = \frac{r^2 + r_1^2 - d^2}{2 r r_1}$$

als Definitionsgleichung für den (imaginären) Schnittwinkel γ beider Kreise gelten. Aehnlich, wenn ein eigentlicher Kreis K und eine Gerade G gegeben sind und p den mit richtigem Zeichen versehenen Abstand des Mittelpunktes von K von der Geraden G bedeutet, so soll der durch die Gleichung

$$\cos \gamma = \frac{p}{r}$$

bestimmte Winkel γ der Schnittwinkel von K und G genannt werden, gleichviel, ob ein wirkliches Durchschneiden stattfindet oder nicht.

Es seien nun K, K_1 beliebige eigentliche Kreise; G, G_1 gerade Linien; Q, Q_1 Punktepaare; P, P_1 Doppelpunkte; $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ einfache Punkte; $\overline{\mathfrak{P}}$, $\overline{\mathfrak{P}}_1$ die zu $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ conjugirten einfachen Punkte. Alle diese Kreise mögen das Gewicht 1 tragen. In der nachfolgenden Tabelle sind die geometrischen Ausdrücke für die Producte jener Kreise der Art zusammengestellt, dass jedesmal da, wo eine Horizontal- und eine Verticalreihe zusammentreffen, der Werth des Products der Kreise zu finden ist, welche den betreffenden Reihen vorgesetzt sind.

Die in der Tabelle enthaltenen Ausdrücke ergeben sich unmittelbar aus dem allgemeinen Ausdruck für das Product zweier Kreise (Gl. 2) § 5)

durch Specialisirung der Kreisfunctionen von A und B, wenn dabei noch die Definition des Gewichts eines Kreises (§ 9) berücksichtigt wird. Die Ausrechnungen konnten füglich weggelassen werden, da sie nichts Bemerkenswerthes bieten; sie gestalten sich übrigens sehr einfach, wenn man das Coordinatensystem in jedem einzelnen Falle passend wählt.

	K	G	Q	P	$\mathfrak{P}$	$\overline{\mathfrak{P}}$
K_1	$\frac{r^2+r_1^2-d^2}{2\,rr_1}=\cos\gamma$					
G_1	$\frac{p}{r}\quad\cos\gamma$	$\cos\gamma$				
Q_1	$\frac{r^2-\varrho\bar\varrho.\,e^{i\alpha}}{2\,r}$	$p+i\,a$	$-\frac{1}{2}\varrho\bar\varrho\, e^{i\alpha}$			
P_1	$\frac{r^2-d^2}{2\,r}$	p	$-\frac{1}{2}\varrho\bar\varrho\, e^{i\alpha}$	$-\frac{1}{2}d^2$		
$\mathfrak{P}_1$	$\frac{\varrho}{r}\cdot e^{i\varphi}$	$e^{i(\varphi-\frac{\pi}{2})}$	$\varrho e^{i\varphi}$	ϱe	o	
$\overline{\mathfrak{P}}_1$	$\frac{\varrho}{r}\cdot e^{-i}$	$e^{-i(\varphi-\frac{\pi}{2})}$	$\bar\varrho e^{-i\bar\varphi}$	$\varrho e^{-i\varphi}$	2	o
U	$\frac{1}{r}$	o	1	1	o	o

Es bleiben zu dieser Tabelle noch folgende Erläuterungen hinzuzufügen:

Zu **K_1 K, G_1 K, G_1 G**: Es bezeichnet γ den von beiden Kreisen eingeschlossenen Winkel.

Zu **Q_1 K**: Hier bedeutet, wie überhaupt in der zu K gehörigen Verticalreihe, r den Halbmesser von K. ϱ und $\bar\varrho$ sind die Längen der vom Mittelpunkt des Kreises K nach den Punkten des Punktepaars Q_1 gezogenen Strecken und α bezeichnet den Winkel jener Strecken, letzteren Winkel in positivem Sinn gemessen und von derjenigen Strecke an gerechnet, welche nach dem negativen Punkte von Q geht.

Zu **P_1 K**: d ist der Abstand des Punktes P_1 vom Mittelpunkt des Kreises K.

Zu **P_1 P**: d ist der Abstand der Punkte.

Zu **$\mathfrak{P}_1$ K** und **$\overline{\mathfrak{P}}_1$ K**: Hier bedeutet ϱ die Länge der vom Mittelpunkt des Kreises K nach dem Punkte $\mathfrak{P}_1$ oder $\overline{\mathfrak{P}}_1$ gezogenen Strecke,

φ den Richtungswinkel dieser Strecke, letztern Winkel von einer festen Geraden $\overline{L}$ angerechnet. Die feste Gerade $\overline{L}$ ist so anzunehmen, dass sie nach einer in positivem Sinne erfolgten Drehung um einen rechten Winkel mit der Geraden L zusammenfällt, die bei Gelegenheit der Bestimmung des Gewichts von einfachen Punkten eingeführt wurde (§ 9).

Zu $\mathbf{Q}_1\,\mathbf{G}$ und $\mathbf{P}_1\,\mathbf{G}$: Es ist hier p der mit dem richtigen Zeichen versehene Abstand des Mittelpunkts des Punktepaares Q (resp. des Doppelpunkts P_1) von der Geraden G, 2a die Projection der vom negativen nach dem positiven Punkt von Q gezogenen Strecke auf die Gerade G.

Zu $\mathfrak{P}_1\,\mathbf{G}$ und $\overline{\mathfrak{P}}_1\,\mathbf{G}$: φ ist der Winkel von G mit der festen Geraden $\overline{L}$ (von letzterer Geraden aus und in positivem Sinne gemessen).

Zu $\mathbf{Q}_1\,\mathbf{Q}$ und $\mathbf{P}_1\,\mathbf{Q}$: Hier bezeichnen ϱ und $\overline{\varrho}$ die Längen der Strecken, welche die gleichnamigen Punkte der Paare Q und Q_1 verbinden und α ist der von jenen Strecken eingeschlossene Winkel. Derselbe ist in positivem Sinn zu messen und von derjenigen Strecke an zu rechnen, welche die negativen Punkte beider Paare verbindet. Diess gilt auch für $P_1\,Q$, denn P_1 kann als Punktepaar aufgefasst werden, in welchem der positive und der negative Punkt der Lage nach zusammenfallen.

Zu $\mathfrak{P}_1\,\mathbf{Q}$ und $\overline{\mathfrak{P}}_1\,\mathbf{Q}$: Es bedeutet ϱ die Länge der Strecke vom positiven Punkt des Paars Q nach $\overline{\mathfrak{P}}_1$, $\overline{\varrho}$ die Länge derjenigen vom negativen Punkt von Q nach $\overline{\mathfrak{P}}_1$ und φ sowie $\overline{\varphi}$ sind die Richtungswinkel jener Strecken, die positive Richtung der festen Geraden $\overline{L}$ als Anfangsrichtung genommen.

Zu $\mathfrak{P}_1\,\mathbf{P}$ und $\overline{\mathfrak{P}}_1\,\mathbf{P}$: ϱ bedeutet die Länge der Strecke von P nach $\mathfrak{P}_1$ oder $\overline{\mathfrak{P}}_1$, φ den Richtungswinkel derselben in Bezug auf $\overline{L}$ als Anfangsrichtung.

Die wichtigsten der in obiger Tabelle gegebenen Formeln sollen jetzt in Worte gefasst wiederholt werden.

Das Product zweier Kreise mit dem Gewicht 1 ist gleich dem cos des von ihnen eingeschlossenen Winkels, wenn dieselben beide eigentliche Kreise, oder beide Geraden sind, oder wenn einer davon ein eigentlicher Kreis, der andere eine Gerade ist.

Das Product eines Doppelpunkts und eines eigentlichen Kreises mit dem Gewicht 1 ist gleich der negativen Potenz des Punktes in Bezug auf den Kreis dividirt durch den Durchmesser des Kreises. Das Product ist daher positiv, wenn der Punkt innerhalb des Kreises liegt, im entgegengesetzten Falle negativ.

Das Product eines Doppelpunkts und einer Geraden mit dem Gewicht 1 ist gleich dem mit dem richtigen Zeichen versehenen Abstand des Punktes von der Geraden.

Das Product zweier Doppelpunkte mit dem Gewicht 1 ist gleich dem halben negativen Quadrat ihres Abstandes.

Das Product eines eigentlichen Kreises vom Gewicht 1 mit U, der doppelt zu denkenden unendlich fernen Geraden, liefert den reciproken Halbmesser des Kreises.

Wie sich aus dem am Schluss von § 9 bewiesenen Satze ergiebt, ist das Product zweier Kreise mit beliebigen Gewichten gleich dem Product ihrer Gewichte mal dem Product, welches beide Kreise ergeben würden, wenn jeder das Gewicht 1 besässe.

§ 11.

Besondere Werthe des Products zweier Kreise.

Es seien K, K_1 eigentliche Kreise, G und G_1 gerade Linien, sämmtlich mit dem Gewicht 1; P und P_1 Doppelpunkte, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ einfache Punkte. Aus den Formeln und Sätzen des vorhergehenden Paragraphen ergeben sich die folgenden speciellen Resultate. Wenn

$$KK_1 = \pm 1$$

ist, so beträgt der von K und K_1 eingeschlossene Winkel o oder π, je nachdem das obere oder untere Zeichen stattfindet, d. h.

$$KK_1 = +1$$

ist die Bedingung dafür, dass sich die Kreise K und K_1 einschliessend,

$$KK_1 = -1$$

dagegen, dass sie sich ausschliessend berühren.

Aehnlich bedeutet

$$KG = \pm 1,$$

dass G eine Tangente von K ist. Das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die positive Richtung von G mit der positiven oder negativen Tangentenrichtung des Kreises zusammenfällt.

Ferner ist

$$GG_1 = 1,$$

wenn die Geraden G und G_1 gleiche,

$$GG_1 = -1,$$

wenn sie entgegengesetzte Richtung haben. Endlich hat man

$$KK = 1, \; GG = 1.$$

Aus

$$KK_1 = o, \text{ oder } KG = o, \text{ oder } GG_1 = o$$

folgt für die bezüglichen Schnittwinkel jener Kreise der Werth $\frac{\pi}{2}$, und umgekehrt verschwinden für diesen Werth jene Productc. In Worten: Wenn zwei reelle eigentliche Kreise, oder ein Kreis und eine Gerade, oder zwei Geraden sich senkrecht schneiden, so ist ihr Product Null und umgekehrt.

Ferner ist offenbar

$$KP = o, \text{ oder } GP = o,$$

wenn P auf K oder G liegt; dagegen

$$PP_1 = o, \text{ oder } P\mathfrak{P} = o,$$

wenn P und P_1, oder P und $\mathfrak{P}$ zusammenfallen. Es wird

$$K\mathfrak{P} = o,$$

wenn $\mathfrak{P}$ in den Mittelpunkt von K fällt. Ist Q ein Punktepaar, K ein reeller eigentlicher Kreis, so wird

$$QK = o,$$

wenn (mit den Bezeichnungen des vorhergehenden Paragraphen)

$$\varrho\bar{\varrho} \sin \alpha = o, \; \varrho\bar{\varrho} \cos \alpha - r^2 = o \text{ ist.}$$

Hieraus folgt, da ϱ und $\bar{\varrho}$ endlich und reell sein müssen:

$$\alpha = o, \; \varrho\bar{\varrho} = r^2.$$

In Worten:

Das Product eines Punktepaares mit einem reellen eigentlichen Kreise verschwindet, wenn die Punkte des Paars harmonisch conjugirt in Bezug auf den Kreis liegen und die Verbindungslinie jener Punkte durch den Kreismittelpunkt geht. Das Product zweier Punktpaare verschwindet, wenn dieselben einen gleichnamigen Punkt gemeinschaftlich haben. Das Product eines Doppelpunkts und eines Punktepaars wird Null, wenn der Doppelpunkt mit einem Punkt des Paars zusammenfällt.

Die Producte PP, $\mathfrak{P}\mathfrak{P}$, UG, $U\mathfrak{P}$, UU sind stets Null.

§ 12.

Differenz zweier einfachen Punkte als Strecke.

Die Differenz zweier gleichnamigen einfachen Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit dem Gewicht 1 ist bis auf einen numerischen Coefficienten gleich U.

Denn ist G eine willkürliche Gerade mit dem Richtungswinkel φ

(in Bezug auf eine feste Richtung als Anfangsrichtung), so hat man (§ 10):

$$G(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) = G\mathfrak{B} - G\mathfrak{A} = e^{\varepsilon i (\varphi - \frac{\pi}{2})} - e^{\varepsilon i (\varphi - \frac{\pi}{2})} = o,$$
$$(\varepsilon = \pm 1)$$

woraus wegen eines Satzes in § 7 die Behauptung folgt. Man kann also setzen

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = c \, . \, U.$$

Um die Zahlgrösse c zu bestimmen multiplicire man die vorhergehende Gleichung mit demjenigen Doppelpunkt A (mit dem Gewicht 1 versehen gedacht), welcher der Lage nach mit $\mathfrak{A}$ zusammenfällt. Dann kommt, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ positive Punkte sind und ϱ die Länge, φ den Richtungswinkel der Strecke von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ bezeichnet,

$$c = A\mathfrak{B} = \varrho e^{i\varphi}$$

(weil $AU = 1$, $A\mathfrak{A} = o$).

Also ist

$$1) \quad \mathfrak{B} - \mathfrak{A} = \varrho e^{i\varphi} \, . \, U.$$

Setzt man an Stelle von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die conjugirten Punkte $\bar{\mathfrak{A}}$ und $\bar{\mathfrak{B}}$, so erhält man

$$1\alpha) \quad \bar{\mathfrak{B}} - \bar{\mathfrak{A}} = \varrho e^{-i\varphi} . \, U.$$

Es sind zufolge Gleichung 1) zwei Punktdifferenzen $(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{D} - \mathfrak{C})$ einander gleich, wenn die nach Länge und Richtung zugleich aufgefassten Strecken von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ und von $\mathfrak{C}$ nach $\mathfrak{D}$ einander gleich sind. Aus diesem Grunde kann man geradezu die Strecke von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ als einen Ersatz für die Punktdifferenz $(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})$ resp. die der Anschauung unzugängliche mit dem Gewicht $\varrho e^{i\varphi}$ behaftete unendlich ferne Gerade betrachten. (Vergl. A_1 § 99.)

Eine Vergleichung von 1) und 1 a) zeigt, dass die Strecke, welche $(\bar{\mathfrak{B}} - \bar{\mathfrak{A}})$ repräsentirt, zur Strecke $(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})$ symmetrisch ist in Bezug auf die feste Axe, von welcher an die Richtungswinkel gezählt werden, oder dass, nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch, die Strecken $(\bar{\mathfrak{B}} - \bar{\mathfrak{A}})$ und $(\mathfrak{B} - \mathfrak{A})$ conjugirt zu nennen sind.

Aus der ersten Auffassung der Strecke, als Differenz zweier gleichnamigen einfachen Punkte mit dem Gewicht 1, ergiebt sich ohne Weiteres als Regel für die Addition zweier beliebigen Strecken: Man lege die gegebenen Strecken in beliebiger Reihenfolge, aber ohne ihre Richtungen zu ändern, so aneinander, dass der Anfangspunkt der zweiten mit dem Endpunkt der ersten zusammenfällt, so ist die Strecke vom Anfangs-

punkt der ersten nach dem Endpunkt der zweiten Strecke die Summe beider gegebenen Strecken.

Denn sind nach Ausführung der Construction $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die Begrenzungspunkte der ersten, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ diejenigen der zweiten Strecke, so sind die Strecken von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{C}$ bez. ausgedrückt durch

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{A},\ \mathfrak{C} - \mathfrak{B},\ \mathfrak{C} - \mathfrak{A}.$$

Man hat aber in der That

$$(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) + (\mathfrak{C} - \mathfrak{B}) = (\mathfrak{C} - \mathfrak{A}).$$

Wie man sieht, stimmt die sich hier ergebende Addition von Strecken mit der allbekannten, ursprünglich aus der Theorie der complexen Zahlen entsprungenen, überein. *)

Die zweite Auffassung, wonach die Strecke für die mit einem bestimmten Gewicht versehene unendlich ferne Gerade stellvertretend auftritt, führt ebenso leicht zur geometrischen Erklärung der Multiplication einer Strecke mit einer Zahlgrösse. Denn ist

$$S = \rho\, e^{i\varphi} .\, U$$

eine beliebig gegebene Strecke und

$$\alpha = \sigma\, e^{i\psi}$$

eine beliebige complexe Zahl, so wird

$$\alpha .\, S = \rho\sigma\, e^{i(\varphi + \psi)} .\, U,$$

also ist $\alpha . S$ eine Strecke von der Länge $\rho\sigma$ und dem Richtungswinkel $(\varphi + \psi)$. In Worten: Eine Strecke mit einer complexen Zahl multipliciren heisst, ihre Länge mit dem Modul jener Zahl multipliciren und ihre Richtung in positivem Sinne um einen Winkel gleich der Amplitude der gegebenen complexen Zahl ändern. Von hier aus gelangt man wieder, indem man die Einheit der Zahlen durch eine beliebige Strecke darstellt, zu der bekannten Versinnlichung der complexen Zahlen durch Strecken (bez. durch Punkte, wenn man alle Strecken von demselben Punkte ausgehen lässt und sie durch ihre Endpunkte ersetzt).

Wie im letzten Abschnitt gezeigt werden soll, lassen sich die Strecken mit Vortheil bei der Lösung der fundamentalen Aufgabe verwenden, die Summe mehrerer Kreise geometrisch zu construiren.

---

*) Nach Angabe von Fr. Riecke in seiner „Rechnung mit Richtungszahlen" (Stuttgart, 1856), wurde die Addition der Strecken, überhaupt die Darstellung complexer Zahlen durch Strecken zuerst begründet von Mourey in seinem 1828 erschienenen Werke: „La vraie theorie des quantités prétendues imaginaires".

Abschnitt III.

Coordinatensystem. Algebraische Netze und Büschel.

§ 13.

Coordinatensystem.

Ein System von vier linear unabhängigen Kreisen, aus welchen andere Kreise linear abgeleitet werden sollen, heisst ein Coordinatensystem. Wenn ein beliebiger Kreis X aus den linear unabhängigen Kreisen $A_1 \ldots A_4$ durch die Gleichung

$$X = x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4$$

abgeleitet ist, so nennen wir x_1, x_2, x_3, x_4 die Coordinaten des Kreises X in Bezug auf das durch die Grundkreise $A_1 \ldots A_4$ gebildete Coordinatensystem. (Vergl. A_2, 393 Anm.)

Wenn man nicht auf das Gewicht, sondern nur auf die Lage und geometrische Beschaffenheit eines Kreises Rücksicht nimmt, so ist derselbe offenbar schon durch die Verhältnisse seiner Coordinaten bestimmt.

Wenn mehrere Kreise in linearer Beziehung stehen, so besteht dieselbe lineare Beziehung auch für die gleichnamigen Coordinaten jener Kreise.

Denn sind z. B. X, Y, Z .... mit den Coordinaten $x_1 \ldots x_4$ $y_1 \ldots y_4$; $z_1 \ldots z_4$; ... mehrere Kreise, welche die lineare Beziehung erfüllen

$$\xi X + \eta Y + \zeta Z + \ldots = o,$$

so hat man

$$(\xi x_1 + \eta y_1 + \zeta z_1 + \ldots) A_1 + (\xi x_2 + \eta y_2 + \zeta z_2 \ldots) A_2 + \ldots + (\xi x_4 + \eta y_4 + \zeta z_4 + \ldots) A_4 = o.$$

Da aber $A_1 \ldots A_4$ linear unabhängig sind, so folgt hieraus

$$\xi x_1 + \eta y_1 + \zeta z_1 + \ldots = o$$
$$\xi x_2 + \eta y_2 + \zeta z_2 + \ldots = o$$
$$— — — — — — — —$$
$$\xi x_4 + \eta y_4 + \zeta z_4 + \ldots = o.$$

§ 14.

Begriff des Normalseins zweier Kreise.

Es soll von zwei Kreisen gesagt werden, sie seien normal zu einander, wenn ihr Product verschwindet. (Vgl. A_2, Nr. 152.)

Zwei reelle eigentliche Kreise oder Geraden insbesondere sind zu einander normal, wenn sie sich senkrecht schneiden. (S. § 11.)

Nach dem Satze in § 6 gibt es keinen Kreis, der zu jedem andern Kreise normal wäre, sondern wenn zwei Kreise normal zu einander sind, so bedingt dies immer eine besondere gegenseitige Lage derselben.

§ 15.

Hilfssatz.

Wenn $B_1 \ldots B_4$ vier beliebige linear unabhängige Kreise sind und man die Gleichungen hat

$$A B_1 = o,\ A B_2 = o,\ A B_3 = o,\ A B_4 = o,$$

so ist

$$A = o.$$

Denn aus $B_1 \ldots B_4$ lässt sich jeder beliebige Kreis B linear ableiten (§ 4). Es sei etwa

$$B = \beta_1 B_1 + \ldots + \beta_4 B_4.$$

Dann folgt durch Multiplication dieser Gleichung mit A:

$$A B = \beta_1 . A B_1 + \ldots + \beta_4 . A B_4,$$

oder da

$$A B_1 = o, \ldots . A B_4 = o,$$

$$A B = o.$$

Da letztere Gleichung für jedes beliebige B gilt, so hat man nach dem Satze in § 6 in der That

$$A = o.$$

§ 16.

Gemeinschaftlicher Normalkreis.

Wenn drei beliebige linear unabhängige Kreise gegeben sind, so gibt es einen bestimmten Kreis, welcher zu jedem von ihnen normal ist. Er soll der gemeinschaftliche Normalkreis jener drei Kreise genannt werden.

Sind insbesondere die gegebenen Kreise reelle eigentliche Kreise,

so ist der gemeinschaftliche Normalkreis identisch mit ihrem gemeinschaftlichen Orthogonalkreis.

Beweis des Satzes. Angenommen, es sei X ein Kreis, welcher zu den drei gegebenen linear unabhängigen Kreisen B_1, B_2, B_3 normal ist. Seine Coordinaten in Bezug auf ein beliebiges System von Grundkreisen $A_1 \ldots A_4$ seien $x_1 \ldots x_4$.

Multiplicirt man die alsdann bestehende Gleichung

$$X = x_1 A_1 + \ldots + x_4 A_4 \quad (\S\ 13)$$

der Reihe nach mit B_1, B_2, B_3, so erhält man, da

$$X B_1 = X B_2 = X B_3 = o$$

sein soll,

$$o = x_1 . A_1 B_1 + \ldots + x_4 . A_4 B_1$$
$$o = x_1 . A_1 B_2 + \ldots + x_4 . A_4 B_2$$
$$o = x_1 . A_1 B_3 + \ldots + x_4 . A_4 B_3.$$

Wenn diese Gleichungen unabhängig sind, so liefern sie die Verhältnisse der x und damit die Lage und Beschaffenheit von X auf eindeutige Weise (§ 13). Jene Gleichungen sind nun in der That unabhängig. Denn wären sie es nicht, so liessen sich drei von Null verschiedene Coefficienten β_1, β_2, β_3 derart finden, dass man für jeden Werth der x hätte:

$$x_1 \sum_{k=1}^{3} \beta_k . A_1 B_k + \ldots + x_4 \sum_{k=1}^{3} \beta_k . A_4 B_k = o.$$

Diese Gleichung zerfällt in die vier anderen:

$$\sum_{k=1}^{3} \beta_k . A_1 B_k = o, \ldots . \sum_{k=1}^{3} \beta_k . A_4 B_k = o$$

welche auch geschrieben werden können:

$$A_1 (\Sigma\, \beta_k B_k) = o, \ldots A_4 (\Sigma\, \beta_k B_k) = o.$$

Letzere Gleichungen haben jedoch, da $A_1 \ldots A_4$ linear unabhängig sind, die nach der Voraussetzung unstatthafte lineare Beziehung

$$\sum_{k=1}^{3} \beta_k B_k = o$$

zur Folge (S. den Hilfssatz, § 15).

Damit ist der Satz bewiesen.

§ 17.

Coordinatenverwandlung.

Aufgabe. Wenn $x_1 \ldots x_4$ die Coordinaten eines beliebigen Kreises X in Bezug auf das System der Grundkreise $A_1 \ldots A_4$, $x'_1 \ldots x'_4$

die Coordinaten desselben Kreises in Bezug auf ein beliebiges anderes System von Grundkreisen $A'_1 \dots A'_4$ bezeichnen, die Coordinaten x_k durch die Coordinaten x'_k auszudrücken und umgekehrt.

Auflösung. Aus dem in § 13 aufgestellten Begriff der Coordinaten folgt, dass man hat:

$$1)\ X = x_1 A_1 + \dots + x_4 A_4 = x'_1 A'_1 + \dots + x'_4 A'_4.$$

Es bezeichne nun B_k den gemeinschaftlichen Normalkreis der Kreise A_{k+1}, A_{k+2}, A_{k+3}, und ebenso B'_k den gemeinschaftlichen Normalkreis von A'_{k+1}, A'_{k+2}, A'_{k+3}.

$$(k = 1, 2, 3, 4 \,.\, k + 4 \equiv k).$$

Multiplicirt man Gleichung 1) mit B_k und dividirt durch $A_k B_k$ so kommt da

$$A_k B_l = o \text{ für } l \gtrless k,$$

$$2)\ \left(\frac{X B_k}{A_k B_k} =\right) x_k = \frac{\sum\limits_{l=1}^{4} x'_l \,.\, A'_l B_k}{A_k B_k}$$

Multiplicirt man dagegen mit B'_k und dividirt durch $A'_k B'_k$ so ergiebt sich:

$$3)\ x'_k = \frac{\sum\limits_{l=1}^{4} x_l \,.\, A_l B'_k}{A'_k B'_k}$$

Durch die Gleichungen 2) und 3) ist die Aufgabe gelöst.

Setzt man

$$\frac{A'_l B_k}{A_k B_k} = a_{kl}, \quad \frac{A_l B'_k}{A'_k B'_k} = a'_{kl},$$

so gehen dadurch die Gleichungen 2) und 3) über in

$$4)\ x_k = \sum_{l=1}^{4} x'_l a_{kl}, \quad x'_k = \sum_{l=1}^{4} x_l a'_{kl}.$$

Die Coefficienten a_{kl} haben eine einfache Bedeutung. Nämlich es sind, wie unmittelbar aus 4) hervorgeht,

$$a_{1k} \dots a_{4k}$$

die Coordinaten von A'_k in Bezug auf das ursprüngliche System,

$$a'_{1k} \dots \alpha'_{4k}$$

die Coordinaten von A_k in Bezug auf das neue System.

Da, wie die Gleichungen 4) zeigen, die x_k lineare Functionen der x'_k sind und umgekehrt, so hat man den Satz:

Der Grad einer homogenen algebraischen Gleichung zwischen den

Coordinaten eines Kreises wird durch Verwandlung des Coordinatensystems nicht geändert.

Anmerkung. Der erste Theil von Gleichung 2. nämlich

$$x_k = \frac{[illegible]}{[illegible]}.$$

zeigt die geometrische Bedeutung der Coordinaten x_k. Wählt man zu Grundkreisen des Coordinatensystems nur eigentliche Kreise, Geraden und Doppelpunkte, deren gegenseitige Producte bei Annahme reeller Gewichte alle reell sind, so müssen, wie aus obiger Gleichung hervorgeht, die Coordinaten eines Kreises X, der ebenfalls entweder ein eigentlicher Kreis, oder eine Gerade, oder ein Doppelpunkt ist, auch reell sein — wenigstens nach Ausscheidung eines möglicherweise auftretenden complexen gemeinsamen Factors — und dasselbe gilt umgekehrt.

§ [illegible]

Algebraische Kreisnetze.

Die Gesammtheit aller Kreise, deren auf ein beliebiges System von Grundkreisen sich beziehende Coordinaten einer homogenen algebraischen Gleichung nten Grades genügen, heisst ein Netz nten Grades. Vgl. [illegible]

§ [illegible]

Satz. Drei Netze von den Graden m, n, p haben im Allgemeinen m n p Kreise gemeinschaftlich.

Denn es gibt im Allgemeinen m n p Werthsysteme der Verhältnisse von vier Grössen, welche drei homogenen Gleichungen zwischen diesen Grössen, die bezw. vom mten, nten, und pten Grade sind, gleichzeitig genügen. S. § [illegible] und § [illegible].

Drei lineare Netze, d. h. drei Netze ersten Grades, haben im Allgemeinen einen einzigen Kreis gemeinschaftlich.

§ 2[illegible]

Kreisbüschel nten Grades.

Eine Reihe von unendlich vielen stetig aufeinanderfolgenden Kreisen, welche so beschaffen ist, dass einem beliebigen linearen Netz n Kreise der Reihe angehören, heisst ein Büschel nten Grades.

§ 21.

Satz. Zwei Netze von den Graden m und n haben im Allgemeinen einen Büschel $m \cdot n$ten Grades gemeinschaftlich.

Folgt aus § 19 und § 20.

Zusätze. Die gemeinschaftlichen Kreise eines Netzes vom n ten Grade und eines linearen Netzes bilden im Allgemeinen einen Büschel n ten Grades. Zwei lineare Netze haben einen linearen Büschel gemeinschaftlich. Einem Netz n ten Grades und einem linearen Büschel gehören im Allgemeinen n Kreise zugleich an. Ein lineares Netz und ein linearer Büschel haben einen einzigen Kreis gemeinschaftlich.

§ 22.

Satz. Alle Kreise X, welche zu einem und demselben Kreise C normal sind, erfüllen ein lineares Netz.

Beweis. Es seien $A_1 \ldots A_4$ die Grundkreise des Coordinatensystems, $x_1 \ldots x_4$ die Coordinaten von X, so dass

$$X = x_1 A_1 + \ldots + x_4 A_4 \text{ ist. } (\S\ 13.)$$

Durch Multiplication der letzteren Gleichung mit C ergiebt sich, da nach der Voraussetzung

$$XC = o \text{ ist,}$$

$$o = x_1 . A_1 C + \ldots + x_4 . A C,$$

d. h. die Coordinaten von X genügen einer homogenen linearen Gleichung, womit der Satz bewiesen ist. (§ 18.)

Zusatz. Zwei verschiedenen Kreisen C und C' entsprechen auch zwei verschiedene Netze. Denn angenommen, die zu C und C' gehörigen Netze wären identisch, so wäre für jedes Werthsystem der x

$$x_1 . A_1 C + \ldots + x_4 . A_4 C = x_1 . A_1 C' + \ldots + x_4 . A_4 C'.$$

Also hätte man

$$A_1 (C - C') = o, \ldots A_4 (C - C') = o,$$

oder zufolge § 15

$$C - C' = o$$

also müsste $C = C'$ sein.

Alle Kreise, welche zu zwei verschiedenen Kreisen normal sind, bilden daher stets einen linearen Büschel. (§ 21, Zusatz.)

§ 23.

Satz. Alle Kreise eines linearen Netzes sind zu einem und demselben Kreise normal. Derselbe heisst der Normalkreis des Netzes.

Beweis des Satzes. Die Gleichung des gegebenen Netzes, bezogen auf ein beliebiges Coordinatensystem mit den Grundkreisen $A_1 \ldots A_4$ sei

$$1)\ c_1\, x_1 + \ldots + c_4\, x_4 = o$$

Nennt man B_k den gemeinschaftlichen Normalkreis der Kreise

$$A_{k+1},\ A_{k+2},\ A_{k+3},\ (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ .\ k + 4 \equiv k)$$

so ist nach Gleichung 2) in § 17

$$2)\ x_k = \frac{X\ B_k}{A_k\ B_k}$$

Setzt man die Werthe der x aus dieser Gleichung in 1) ein, so kommt

$$c_1 \frac{X\, B_1}{A_1\, B_1} + \ldots + c_4 \frac{X\ B_4}{A_4\, B_4} = o,$$

oder wenn man X allein setzt:

$$3)\ X\left(\frac{c_1}{A_1\ B_1}\, .\ B_1 + \ldots + \frac{c_4}{A_4\ B_4}\, .\, B_4\right) = o.$$

Somit ist jeder Kreis X, welcher dem gegebenen Netz angehört, zu einem bestimmten Kreise, nämlich dem Kreise

$$C = \frac{c_1}{A_1\ B_1}\, .\ B_1 + \ldots + \frac{c_1}{A_4\ B_4}\, .\ B_4$$

normal. Ausser diesem giebt es wegen § 24 Zusatz keinen zweiten Kreis, welcher zu allen Kreisen des Netzes normal wäre.

§ 24.

Satz. Zwischen vier beliebigen Kreisen eines linearen Netzes besteht immer eine lineare Beziehung.

Beweis. Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 vier beliebige Kreise eines Netzes, A dessen Normalkreis, B ein beliebiger Kreis, welcher jedoch zu A nicht normal ist. Zwischen den fünf Kreisen $A_1 \ldots A_4$, B besteht sicher eine lineare Beziehung (§ 3).

Dieselbe sei

$$\alpha_1\ A_1 + \ldots + \alpha_4\ A_4 + \beta\ B = o.$$

Diese Gleichung ergiebt, wenn man sie mit A multiplicirt

$$\beta\ (A\, B) = o$$

$$(\text{weil } A\, A_1 = \ldots = A\, A_4 = o),$$

oder da nach der Voraussetzung

$$A\, B \gtrless o,$$

$$\beta = o.$$

Folglich stehen die Kreise $A_1 \ldots A_4$ in der linearen Beziehung

$$\alpha_1\ A_1 + \ldots + \alpha_4\ A_4 = o.$$

Zusatz. Aus drei beliebigen linear unabhängigen Kreisen eines linearen Netzes können alle Kreise desselben auf eindeutige Weise linear abgeleitet werden.

Beweis ähnlich dem in § 4.

§ 25.

Satz. (Umkehrung). Wenn zwischen vier Kreisen eine lineare Beziehung besteht, so gehören sie demselben linearen Netz an.

Beweis. Es seien $A_1 \ldots A_4$ vier Kreise, welche einer linearen Gleichung, etwa

$$\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_4 A_4 = 0$$

genügen. Die α können theilweise, aber nicht alle Null sein. Wenn etwa α_1 von Null verschieden ist, so bestimme man den gemeinschaftlichen Normalkreis A von A_2, A_3 und A_4 und multiplicire mit demselben die obige Gleichung.

Man erhält alsdann

(da $$A A_2 = A A_3 = A A_4 = 0)$$

$$\alpha_1 . A A_1 = 0,$$

oder da $$\alpha_1 \gtrless 0$$

$$A A_1 = 0,$$

d. h. A_1 liegt, ebenso wie A_2, A_3 und A_4 in dem Netz, dessen Normalkreis A ist.

Zusatz. Alle Kreise, welche aus drei linear unabhängigen Kreisen abgeleitet werden können, gehören einem und demselben linearen Netz an, welches auch die gegebenen Kreise enthält. Ein lineares Netz ist daher durch drei linear unabhängige seiner Kreise bestimmt, oder anders gesprochen, zwei lineare Netze fallen zusammen, wenn sie drei linear unabhängige Kreise gemeinschaftlich haben.

§ 26.

Satz. Zwischen drei beliebigen Kreisen eines linearen Büschels besteht immer eine lineare Beziehung.

Beweis. Es seien A_1, A_2, A_3 drei beliebige Kreise des gegebenen Büschels. Letzterer sei zwei linearen Netzen gemeinschaftlich, deren Normalkreise B_1 und B_2 heissen mögen. Dann ist B_1 sowohl als B_2 zu allen Kreisen des gegebenen Büschels normal. Man nehme zwei beliebige

Kreise C_1 und C_2 hinzu, welche dem linearen Büschel nicht angehören, d. h. weder zu B_1 noch zu B_2 normal sind.

Zwischen den fünf Kreisen A_1, A_2, A_3, C_1, C_2 besteht eine lineare Beziehung (§ 3), welche die Form haben möge

$$\alpha_1\ A_1 + \alpha_2\ A_2 + \alpha_3\ A_3 + \gamma_1\ C_1 + \gamma_2\ C_2 = o.$$

Multiplicirt man diese Gleichung zuerst mit B_1, dann mit B_2, so kommt

$$\gamma_1\ .\ C_1\,B_1 + \gamma_2\ .\ C_2\,B_1 = o$$
$$\gamma_1\ .\ C_1\,B_2 + \gamma_2\ .\ C_2\,B_2 = o.$$

Man kann nun die Kreise C_1 und C_2 stets so wählen, dass die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_1\,B_1 & C_2\,B_1 \\ C_1\,B_2 & C_2\,B_2 \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet. Denn nimmt man den einen der Kreise, etwa C_1, beliebig, jedoch ausserhalb des gegebenen Büschels an, so beschränkt die Gleichung

$$\Delta = C_1\,B_1\ .\ C_2\,B_2 - C_1\,B_2\ .\ C_2\,B_1 = o,$$

wie man aus folgender Gestalt derselben ersieht:

$$\Delta = C_2\ (B_2\ .\ C_1\,B_1 - B_1\ .\ C_1\,B_2) = o,$$

den Kreis C_2 auf ein bestimmtes lineares Netz. Wenn man daher den Kreis C_2 so wählt, dass er weder dem eben genannten linearen Netz, noch dem gegebenen Büschel angehört, so verschwindet weder die Determinante Δ, noch eines der Producte $C_1\,B_1$, $C_1\,B_2$, $C_2\,B_1$, $C_2\,B_2$. Daher ist nothwendig

$$\gamma_1 = o,\ \gamma_2 = o,$$

d. h. zwischen den Kreisen A_1, A_2, A_3 besteht die lineare Beziehung

$$\alpha_1\ A_1 + \alpha_2\ A_2 + \alpha_3\ A_3 = o.$$

Zusatz. Aus zwei beliebigen linear unabhängigen Kreisen eines linearen Büschels können alle Kreise des Büschels auf eindeutige Weise linear abgeleitet werden.

Beweis ähnlich dem in § 4.

§ 27.

Satz (Umkehrung). Wenn drei Kreise in linearer Beziehung stehen, so gehören sie einem und demselben linearen Büschel an.

Beweis. Es seien A_1, A_2, A_3 drei Kreise, zwischen welchen die lineare Beziehung

$$\alpha_1\ A_1 + \alpha_2\ A_2 + \alpha_3\ A_3 = o$$

herrscht. Die α können nicht alle Null sein. Wenn etwa α_1 ungleich Null ist, so nehme man aus dem Büschel von Kreisen, welche alle zu A_2 und A_3 gleichzeitig normal sind (§ 22 Zus.), irgend zwei, sie mögen B_1 und B_2 heissen, heraus und multiplicire die obige Gleichung nach einander mit B_1 und B_2. Man erhält dann

$$\alpha_1 \, . \, A_1 B_1 = o, \; \alpha_1 \, . \, A_1 B_2 = o,$$

oder da

$$\alpha_1 \gtrless o,$$

$$A_1 B_1 = o, \; A_1 B_2 = o,$$

d. h. A_1 gehört mit A_2 und A_3 dem Büschel an, welcher den beiden linearen Netzen mit den Normalkreisen B_1 und B_2 gemeinschaftlich ist.

Zusätze. Alle Kreise, welche aus zwei beliebigen linear unabhängigen Kreisen linear abgeleitet werden können, bilden einen linearen Büschel, welchem auch die gegebenen Kreise angehören. Ein linearer Büschel ist daher durch zwei beliebige (aber linear unabhängige) seiner Kreise bestimmt. Zwei lineare Büschel fallen deshalb zusammen, wenn sie zwei linear unabhängige Kreise gemeinschaftlich haben. Hat ein linearer Büschel zwei linear unabhängige Kreise mit einem linearen Netz gemeinschaftlich, so gehören alle Kreise des Büschels dem Netze an. In anderer Fassung heisst dies: Ist ein Kreis zu zwei unabhängigen Kreisen eines linearen Büschels normal, so ist er es zu allen Kreisen des Büschels. Daraus folgt z. B.: Wenn ein linearer Büschel eigentliche Kreise enthält, so liegen deren Mittelpunkte entweder auf einer Geraden, oder sie fallen zusammen (System concentrischer Kreise).

Ferner: Schneiden sich zwei reelle eigentliche Kreise eines linearen Büschels in zwei reellen Punkten, so gehen alle Kreise des Büschels durch diese Punkte (denn ein Doppelpunkt ist zu einem Kreise normal, wenn er auf demselben liegt, § 11). Enthält ein linearer Büschel zwei Geraden, so besteht er aus lauter durch einen Punkt gehenden Geraden, ist also ein gewöhnlicher Strahlenbüschel (denn die unendlich ferne Gerade ist normal zu jeder Geraden, § 7).

§ 28.

Satz. Wenn zwei Kreise in linearer Beziehung stehen, so sind dieselben bis auf das Gewicht identisch.

Denn sind A_1 und A_2 zwei Kreise, welche in der Beziehung stehen

$$\alpha_1 \, A_1 + \alpha_2 \, A_2 = o,$$

wo α_1 und α_2 von Null verschieden sind, so folgt daraus

$$A_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} A_2,$$

was nach einem Satze in § 9 mit der Behauptung übereinstimmt.

Abschnitt IV.

Die Geraden und Punkte. Doppelverhältniss. Beziehungen zur Raumgeometrie.

§ 29.

Netz der Geraden.

Die Geraden der Ebene bilden ein lineares Netz.

Denn jede Gerade X genügt der Gleichung

$$UX = o \qquad (§§ 7, 10).$$

Daher erfüllen sämmtliche Geraden ein lineares Netz, dessen Normalkreis U, die unendlich ferne Gerade ist. (§ 22.)

Da

$$UU = o$$

ist, so gehört die unendlich ferne Gerade selbst dem linearen Netz der Geraden an. Ausserdem gehören zu demselben die einfachen Punkte als Repräsentanten der Kreispunktlinien. (§§ 7 und 8).

Jeder Büschel nten Grades enthält im Allgemeinen n Geraden, jedes Netz nten Grades einen aus Geraden bestehenden Büschel nten Grades. (§ 21).

§ 30.

Das absolute Netz.

Die Punkte der Ebene, als Doppelpunkte aufgefasst, bilden ein Kreisnetz zweiten Grades. Dasselbe soll das absolute Netz genannt werden.

Beweis des Satzes. Führt man ein Coordinatensystem ein, bestehend aus vier beliebigen linear unabhängigen Kreisen $A_1 \dots A_4$ und setzt

$$X = x_1 A_1 + \dots + x_4 A_4 \qquad (\S\ 13),$$

so ergibt sich durch Multiplication dieser Gleichung mit sich selbst:

$$XX = x_1^2 . A_1 A_1 + 2 x_1 x_2 . A_1 A_2 + \dots + x_4^2 . A_4 A_4.$$

Nun besteht für jeden Doppelpunkt X die Gleichung

$$XX = o \qquad (\S\ 11).$$

Daher erfüllen die Coordinaten $x_1 \dots x_4$ eines jeden Doppelpunktes die quadratische Gleichung

$$x_1^2 . A_1 A_1 + 2 x_1 x_2 . A_1 A_2 + \dots + x_4^2 . A_4 A_4 = o,$$

womit der Satz bewiesen ist. (§ 18.) Zu demselben quadratischen Netz gehören auch die Punktepaare, die einfachen Punkte, sowie die unendlich ferne Gerade, weil diese uneigentlichen Kreise ebenfalls der Gleichung $XX = o$ genügen.

§ 31.

Satz. Das absolute Netz enthält keinen linearen Büschel von Doppelpunkten.

Beweis. Angenommen, es enthielte ein linearer Büschel, der ganz dem absoluten Netz angehört, zwei getrennte Doppelpunkte P und Q. Jeder Kreis des Büschels hat die Gestalt

$$P + \lambda Q \qquad (\S\ 26, \text{Zus.})$$

und da derselbe dem absoluten Netz angehört, so muss für jeden Werth von λ

$$(P + \lambda Q)(P + \lambda Q) = o$$

sein. (§ 30.) Man hat also

$$PP = o, \; QQ = o, \; PQ = o.$$

Die ersten beiden Gleichungen sind von selbst erfüllt (weil P und Q der Annahme nach Doppelpunkte sind), die dritte verlangt, dass die Doppelpunkte P und Q zusammenfallen. (§ 11.) Also kann ein dem absoluten Netz angehöriger Büschel nie zwei verschiedene Kreise besitzen, welche in Doppelpunkte ausarten, viel weniger aus lauter Doppelpunkten bestehen.

§ 32.

Satz. Der Büschel zweiten Grades, welchen ein beliebiges lineares Netz mit dem absoluten Netz gemeinschaftlich hat (§ 21), zerfällt dann und nur dann in zwei lineare Büschel,

wenn der Normalkreis jenes linearen Netzes dem absoluten Netz selbst angehört.

Beweis. Es seien A der Normalkreis und A_1, A_2, A_3 drei beliebige linear unabhängige Kreise des gegebenen linearen Netzes. Ein beliebiger Kreis X desselben Netzes sei gegeben durch

$$X = x_1\, A_1 + x_2\, A_2 + x_3\, A_3. \qquad (\S\ 24\ \text{Zus.})$$

Damit der Kreis X dem absoluten Netz angehöre, muss die Gleichung stattfinden

$$X\,X \equiv x_1{}^2\,.\,A_1\,A_1 + 2\,x_1\,x_2\,.\,A_1\,A_2 + \ldots + x_3{}^2\,.\,A_3\,A_3 = o.$$

Die Discriminante der vorhergehenden Gleichung ist:

$$\triangle = \begin{vmatrix} A_1\,A_1 & A_1\,A_2 & A_1\,A_3 \\ A_2\,A_1 & A_2\,A_2 & A_2\,A_3 \\ A_3\,A_1 & A_3\,A_2 & A_3\,A_3 \end{vmatrix}$$

Es ist nachzuweisen, dass dieselbe verschwindet, wenn $A\,A = o$ ist.

Wenn nun letztere Gleichung erfüllt ist, so gehört A selbst dem gegebenen linearen Netz an und kann folglich aus A_1, A_2, A_3 linear abgeleitet werden (§ 24 Zus.). Es geschehe dies etwa durch die Gleichung

$$A = \alpha_1\, A_1 + \alpha_2\, A_2 + \alpha_3\, A_3.$$

Multiplicirt man diese Gleichung der Reihe nach mit A_1, A_2, A_3, so kommt, da

$$A_1\,A = A_2\,A = A_3\,A = o,$$

$$o = \alpha_1\,.\,A_1\,A_1 + \alpha_2\,.\,A_1\,A_2 + \alpha_3\,.\,A_1\,A_3$$
$$o = \alpha_1\,.\,A_2\,A_1 + \alpha_2\,.\,A_2\,A_2 + \alpha_3\,.\,A_2\,A_3$$
$$o = \alpha_1\,.\,A_3\,A_1 + \alpha_2\,.\,A_3\,A_2 + \alpha_3\,.\,A_3\,A_3.$$

Da diese Gleichungen neben einander bestehen müssen, so ist in der That

$$\triangle = \begin{vmatrix} A_1\,A_1 & A_1\,A_2 & A_1\,A_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_3\,A_1 & A_3\,A_2 & A_3\,A_3 \end{vmatrix} = o.$$

Wenn umgekehrt der quadratische Büschel, welchen das gegebene lineare und das absolute Netz gemeinschaftlich besitzen, in zwei lineare Büschel zerfällt, so ist leicht zu beweisen, dass der jenen linearen Büscheln gemeinschaftliche Kreis der Normalkreis des linearen Netzes ist. Denn es seien B ein beliebiger Kreis des einen, C ein beliebiger Kreis des anderen linearen Büschels und A ihr gemeinschaftlicher Kreis. Jeder

Kreis des ersten resp. zweiten Büschels kann dann auf die Form gebracht werden:

$$A + \lambda B, \text{ resp. } A + \mu C. \qquad (\S\ 26 \text{ Zus.})$$

Damit alle Kreise jener beiden Büschel dem absoluten Netz angehören, müssen daher für jeden Werth von λ und μ die Gleichungen stattfinden:

$$(A + \lambda B)(A + \lambda B) = o, \ (A + \mu C)(A + \mu C) = o,$$

d. h. es muss ausser

$$AA = o, \ BB = o, \ CC = o,$$

welche Gleichungen der Annahme nach schon erfüllt werden, auch sein:

$$AB = o, \ AC = o.$$

Letztere Gleichungen zusammen mit

$$AA = o$$

zeigen, dass A normal ist zu drei linear unabhängigen Kreisen des Netzes, nämlich zu A, B und C, also mit dem Normalkreis des Netzes zusammenfällt.

Zusatz. Die Kreispunktlinien bez. einfachen Punkte bilden zwei lineare Büschel. Denn dieselben sind nach § 29 und § 30 dem absoluten Netz und dem Netz der Geraden gemeinschaftlich und der Normalkreis des letzteren, die unendlich ferne Gerade, gehört selbst dem absoluten Netz an. Zu dem einen Büschel gehören die positiven, zu dem anderen die negativen Kreispunktlinien bez. einfachen Punkte. Daher besteht nach § 26 zwischen drei beliebigen gleichnamigen einfachen Punkten immer eine lineare Beziehung.

§ 33.

Doppelverhältniss.

Wenn A, B, C, D vier beliebige Kreise eines linearen Büschels bedeuten und C und D aus A und B durch die Gleichungen

$$C = A - \lambda B$$
$$D = A - \mu B$$

abgeleitet sind, so nennen wir den Quotienten $\frac{\lambda}{\mu}$ das Doppelverhältniss der vier Kreise A, B, C, D (in dieser Reihenfolge) und bezeichnen es symbolisch durch (A, B, C, D). Wir sagen, vier Kreise eines linearen Büschels seien in harmonischer Lage, wenn ihr Doppelverhältniss gleich — 1 ist.

Vorstehende Definition bildet die Uebertragung der bekannten

analytischen Definition des Doppelverhältnisses von vier Strahlen eines Strahlenbüschels auf die Kreisgeometrie.

Wenn die Kreise A, B, C, D in Geraden übergehen, so stimmt das nach obiger Definition gebildete Doppelverhältniss derselben mit ihrem Doppelverhältniss im gewöhnlichen Sinn überein. Dies geht schon aus der eben gemachten Bemerkung hervor, kann aber auch wie folgt bewiesen werden. Es sei C′ die auf C senkrecht stehende Gerade des Büschels. Multiplicirt man die Gleichung

$$C = A - \lambda B$$

mit C′, so kommt, da

$$C C' = o$$

$$o = A C' - \lambda B C'.$$

Daher ist

$$\lambda = \frac{A C'}{B C'}$$

oder, wenn α und β die Gewichte von A und B bezeichnen,

$$\lambda = \frac{\alpha \cos (AC')}{\beta \cos (BC')} = \frac{\alpha \sin (AC)}{\beta \sin (BC)}$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$\mu = \frac{\alpha \sin (AD)}{\beta \sin (BD)}$$

Folglich ist

$$(A, B, C, D) = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sin (AC)}{\sin (BC)} : \frac{\sin (AD)}{\sin (BD)}$$

§ 34.

Doppelverhältniss eigentlicher Kreise.

Das Doppelverhältniss von vier eigentlichen Kreisen eines Büschels, deren Mittelpunkte nicht zusammenfallen, ist gleich dem Doppelverhältniss ihrer Mittelpunkte, letzteres im gewöhnlichen Sinne genommen.

Beweis. Seien A_1, A_2, A_3, A_4 vier eigentliche Kreise, zwischen welchen die linearen Beziehungen bestehen

$$A_3 = A_1 - \lambda A_2$$

$$A_4 = A_1 - \mu A_2.$$

r_1 und r_2 seien die Halbmesser, α_1, α_2 die Gewichte der Kreise A_1 und A_2 und α_{kl} bezeichne den in bestimmtem Sinn gemessenen Abstand der

Mittelpunkte von A_k und A_l (k, l = 1, 2, 3, 4). Man multiplicire die erste der obigen Gleichungen mit derjenigen Geraden G, welche senkrecht auf der gemeinschaftlichen Centrale der Kreise A steht und durch den Mittelpunkt von A_3 geht, also A_3 senkrecht schneidet. Es ergibt sich alsdann (da $A_3 G = o$)

$$o = A_1 G - \lambda A_2 G$$

oder

$$\lambda = \frac{A_1 G}{A_2 G} = \frac{\alpha_1 a_{13}}{r_1} \cdot \frac{r_2}{\alpha_2 a_{23}} \qquad (\S\ 10).$$

Ebenso findet man

$$\mu = \frac{\alpha_1 a_{14}}{r_1} \cdot \frac{r_2}{\alpha_2 a_{24}}$$

Daher ist in der That

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{a_{13}}{a_{23}} : \frac{a_{14}}{a_{24}}$$

Schneiden sich zwei der gegebenen Kreise, also alle, in zwei reellen Punkten, so folgt aus obigem Satze, dass das Doppelverhältniss der vier Kreise auch gleich dem Doppelverhältniss der Strahlen ist, welche von einem der Schnittpunkte nach den Mittelpunkten der Kreise gehen, oder was dasselbe ist, gleich dem Doppelverhältniss der Tangenten an die Kreise in einem der beiden Schnittpunkte.

§ 35.

Doppelverhältniss einfacher Punkte.

Irgend vier gleichnamige einfache Punkte liefern, da sie einem linearen Büschel angehören (§ 32 Zus.), ein bestimmtes Doppelverhältniss. Es soll die geometrische Bedeutung desselben untersucht werden. Seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4$ vier beliebige (positive) einfache Punkte, welche zu den linearen Beziehungen Anlass geben:

$$\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_1 - \lambda \mathfrak{A}_2$$
$$\mathfrak{A}_4 = \mathfrak{A}_1 - \mu \mathfrak{A}_2.$$

Man nenne α_1 und α_2 die Gewichte von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, a_{kl} die Länge, φ_{kl} den Richtungswinkel der Strecke von $\mathfrak{A}_k$ nach $\mathfrak{A}_l$.

Multiplicirt man die Gleichung

$$\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_1 - \lambda \mathfrak{A}_2$$

mit demjenigen Doppelpunkt A_3, welcher räumlich mit $\mathfrak{A}_3$ zusammenfällt, so kommt, da

$$\mathfrak{A}_3 A_3 = o \qquad (\S\ 11),$$
$$o = \mathfrak{A}_1 A_3 - \lambda\ \mathfrak{A}_2 A_3.$$

Hieraus folgt

$$\lambda = \frac{\mathfrak{A}_1 A_3}{\mathfrak{A}_2 A_3} = \frac{\alpha_1 \cdot a_{31}\, e^{i\varphi_{31}}}{\alpha_2 \cdot a_{32}\, e^{i\varphi_{32}}} \qquad (\S\ 10).$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich

$$\mu = \frac{\alpha_1 \cdot a_{41}\, e^{i\varphi_{41}}}{\alpha_2 \cdot a_{42}\, e^{i\varphi_{42}}}.$$

Daher ist

$$(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4) = \left(\frac{a_{31}}{a_{32}} : \frac{a_{41}}{a_{42}}\right) \cdot \frac{e^{i(\varphi_{31} - \varphi_{32})}}{e^{i(\varphi_{41} - \varphi_{42})}}$$

Bezeichnet man symbolisch durch (a_{31}, a_{32}) den Richtungsunterschied der Strecken a_{31} und a_{32} und entsprechend durch (a_{41}, a_{42}) denjenigen der Strecken a_{41} und a_{42}, so kann man schreiben:

$$(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4) = \left(\frac{a_{31}}{a_{32}} : \frac{a_{41}}{a_{42}}\right) \cdot e^{i\{(a_{31}, a_{32}) - (a_{41}, a_{42})\}}$$

In Worten heisst dies:

Das Doppelverhältniss von vier gleichnamigen (positiven) einfachen Punkten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$ (in dieser Reihenfolge) ist eine complexe Zahl, deren Modul gleich dem aus den Entfernungen jener Punkte gebildeten Doppelverhältniss und deren Amplitude gleich der Differenz der Winkel ist, unter welchen die Strecke $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ von den Punkten $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{A}_4$ aus gesehen wird.

Für die zu den $\mathfrak{A}$ conjugirten Punkte erhält man:

$$(\overline{\mathfrak{A}}_1, \overline{\mathfrak{A}}_2, \overline{\mathfrak{A}}_3, \overline{\mathfrak{A}}_4) = \left(\frac{a_{31}}{a_{32}} : \frac{a_{41}}{a_{42}}\right) e^{-i\{(a_{31}, a_{32}) - (a_{41}, a_{42})\}}$$

also die conjugirte complexe Zahl zu derjenigen, welches das Doppelverhältniss der Punkte $\mathfrak{A}$ vorstellt.

Das hier aus der allgemeinen Definition des Doppelverhältnisses von Kreisen sich ergebende Doppelverhältniss von vier einfachen Punkten stimmt wesentlich überein mit dem von Möbius definirten »complexen« Doppelverhältniss von vier Punkten, die nicht in einer Geraden liegen. *)

§ 36.

Winkel zweier eigentlichen Kreise.

Der Winkel zweier eigentlichen Kreise A und B ist bis auf einen constanten Factor gleich dem Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches die Kreise A und B zusammen mit denjenigen beiden Kreisen bestimmen, die dem linearen Büschel (A, B) und dem absoluten Netz zugleich angehören.

Beweis. Jeder Kreis des Büschels (A, B) kann in der Form dargestellt werden

$$1)\qquad X = A - \lambda B \qquad (\S\ 26\ \text{Zus.}).$$

Durch Multiplication dieser Gleichung mit sich selbst erhält man

$$XX = AA - 2\lambda \,.\, AB + \lambda^2 \,.\, BB.$$

Soll X dem absoluten Netz angehören, so muss

$$XX = 0$$

sein (§ 30). Daher erhält man folgende in λ quadratische Gleichung

$$2)\qquad \lambda^2 \,.\, BB - 2\lambda \,.\, AB + AA = 0,$$

deren Wurzeln λ_1 und λ_2 in Gl. 1) eingesetzt die beiden dem linearen Büschel (A, B) und dem absoluten Netz gemeinsamen Kreise X_1 und X_2 liefern. Man hat also

$$X_1 = A - \lambda_1 B$$
$$X_2 = A - \lambda_2 B,$$

folglich wird das Doppelverhältniss der vier Kreise A, B, X_1, X_2:

$$3)\qquad (A, B, X_1, X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \qquad (\S\ 33).$$

Die Auflösung der Gleichung 2) ergiebt aber

$$\lambda_1 = \frac{AB + \sqrt{(AB)^2 - AA \,.\, BB}}{BB}$$

$$\lambda_2 = \frac{AB - \sqrt{(AB)^2 - AA \,.\, BB}}{BB}$$

*) Berichte der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 1853, S. 15.

Sind nun α und β die Gewichte von A und B und setzt man den von A und B eingeschlossenen Winkel gleich φ, so ist

$$AA = \alpha^2,\ AB = \alpha\beta \,.\, \cos\varphi,\ BB = \beta^2 \qquad (\S\S\ 9,\ 10).$$

Daher wird:

$$4) \qquad \lambda_1 = \frac{\alpha}{\beta}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{\alpha}{\beta}\, e^{i\varphi}$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha}{\beta}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \frac{\alpha}{\beta}\, e^{-i\varphi}$$

Mithin ist

$$5) \qquad e^{2i\varphi} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = (A, B, X_1, X_2) \qquad (Gl.\ 3)$$

oder

$$6) \qquad \varphi = -\frac{i}{2} \lg (A, B, X_1, X_2),$$

womit der Satz bewiesen ist.

Zusätze. Wenn zwei reelle eigentliche Kreise sich senkrecht schneiden, so sind dieselben in Bezug auf das absolute Netz »harmonisch conjugirt,« d. h. der durch sie bestimmte lineare Büschel durchdringt das absolute Netz in zwei Kreisen, welche mit den gegebenen harmonisch liegen.

Denn Gl. 5) ergiebt für

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$(A, B, X_1, X_2) = -1.$$

Wenn zwei reelle eigentliche Kreise sich berühren, so berührt der durch sie bestimmte lineare Büschel das absolute Netz.

Denn für

$$\varphi = o \text{ oder } \varphi = \pi$$

erhält man aus Gl. 5)

$$\lambda_1 = \lambda_2,$$

d. h. die beiden Kreise, welche der durch die gegebenen Kreise bestimmte lineare Büschel mit dem absoluten Netz gemeinschaftlich hat, fallen zusammen.

Wenn A und B reelle eigentliche Kreise sind, so wird, wie leicht zu zeigen ist, der absolute Werth von AB grösser oder kleiner als $\alpha\beta$,

je nachdem A und B ganz ausser einander resp. in einander liegen, oder sich durchschneiden. Daher sind λ_1 und λ_2 conjugirte complexe oder reelle Zahlen, d. h. X_1 und X_2 sind entweder zwei conjugirte Punktepaare oder zwei Doppelpunkte, je nachdem sich A und B reell schneiden oder nicht.

Anmerkung. Wie man aus dem Satze in diesem Paragraphen ersieht, hat das »absolute« Netz für die Metrik in der Kreisgeometrie eine ähnliche Bedeutung, wie die von Cayley »absolute« Fläche genannte Fläche zweiten Grades, auf welche man in der projectivischen Raumgeometrie die Massbestimmungen gründet. *)

Dies ist der Grund, warum wir jenes quadratische Netz mit dem Namen »absolutes Netz« belegt haben.

§ 4.

Beziehungen zwischen ebener Kreisgeometrie und Raumgeometrie.

Grassmann zeigt in A_2 Nr. 405, dass man den Raum und die Ebene so auf einander beziehen kann, dass jedem Punkt des Raumes ein Kreis in der Ebene eindeutig entspricht und zwar derart, dass Punkten einer Ebene im Raume Kreise eines linearen Kreisnetzes in der Ebene zugeordnet erscheinen. Wir wollen auf diese Verwandtschaft etwas näher eingehen. Ihre Herstellung geschieht, indem man in der Ebene ein beliebiges System von vier unabhängigen Grundkreisen, im Raum ein beliebiges Fundamentaltetraeder zum Coordinatensystem wählt und nun einen Kreis in der Ebene und einen Punkt im Raume entsprechend setzt, wenn sie dieselben Coordinaten besitzen. Daraus folgt unmittelbar, dass den Punkten einer Fläche nten Grades im Raume die Kreise eines Netzes nten Grades in der Ebene entsprechen und umgekehrt. Insbesondere entspricht also einer Ebene ein lineares Kreisnetz, einer geraden Linie ein linearer Kreisbüschel und umgekehrt.

Ferner hat man den Satz: Das Doppelverhältniss von vier Kreisen eines linearen Büschels ist gleich dem entsprechend gebildeten Doppelverhältniss der zugeordneten Punkte im Raum. Denn es seien X, Y, Z, T irgend vier Kreise eines linearen Büschels, x, y, z, t die entsprechenden Punkte im Raum. Bestehen zwischen jenen Kreisen die linearen Beziehungen

---

*) Cayley, Sixth memoir upon Quantics, in den Phil. Transactions, t. 149, 1859. Vergl. auch die berühmten Abhandlungen von Klein über die Nicht-Euklidische Geometrie in den Math. Annalen, Bde. IV. und VI

$$1)\qquad \begin{aligned} Z &= X - \lambda\, Y \\ T &= X - \mu\, Y, \end{aligned}$$

so folgt daraus vermöge eines Satzes in § 13

$$2)\qquad \begin{aligned} z_k &= x_k - \lambda y_k \\ t_k &= x_k - \mu y_k \end{aligned}$$

wo die x_k, y_k, z_k, t_k die Coordinaten der Kreise X, Y, Z, T, also der Definition gemäss zugleich die Coordinaten der Punkte x, y, z, t sind. Nach § 33 folgt aber aus 1) der Quotient $\frac{\lambda}{\mu}$ als Doppelverhältniss der Kreise X, Y, Z, T und denselben Werth ergeben (zufolge der bekannten analytischen Definition des Doppelverhältnisses von vier Punkten einer Geraden) die Gleichungen 2) für das Doppelverhältniss der Punkte x, y, z, t.

Wir nehmen jetzt an, dass das im Raume zu Grunde gelegte Fundamentaltetraeder reelle Ecken habe, sowie dass die in der Ebene angenommenen Grundkreise des Coordinatensystems nur aus eigentlichen Kreisen, Geraden oder Doppelpunkten mit reellen Gewichten bestehen. Dann entsprechen den reellen Punkten des Raumes in der Ebene solche Kreise, deren Coordinaten reell sind, d. h. zufolge § 17 Anm. eigentliche Kreise (mit reellem Mittelpunkt und reellem oder rein imaginärem Halbmesser) oder Geraden und reelle Doppelpunkte. Nach § 30 bilden die Doppelpunkte ein quadratisches Netz, das »absolute« Netz, daher hat man: Den Doppelpunkten der Ebene entsprechen (bei der oben gemachten speciellen Annahme) die reellen Punkte einer gewissen Fläche zweiten Grades, sie heisse F, die (wegen des Satzes § 31) keine reellen Graden enthält. Zwei Kreisen, die sich senkrecht schneiden (überhaupt zwei Kreisen, die zu einander normal sind) entsprechen dann im Raum zwei Punkte, welche zur Fläche F harmonisch conjugirt sind (§ 36, erster Zus.). Dem Normalkreis eines linearen Netzes ist daher im Raum der in Bezug auf F genommene Pol der Ebene zugeordnet, deren Punkte den Kreisen jenes Netzes entsprechen. Der (doppelt zu denkenden) unendlich fernen Geraden U in der Ebene entspricht, (weil U dem absoluten Netz angehört, § 30) im Raum ein bestimmter Punkt u der Fläche F und sämmtlichen Geraden in der Ebene sind daher die Punkte der in u an F gelegten Tangentialebene zugeordnet. Die reellen (Doppel-) Punkte, welche ein eigentlicher Kreis A besitzt, können aufgefasst werden als die Kreise, in welchen das lineare Netz, dessen Normalkreis

A ist, das absolute Netz durchdringt. Wenn daher a der dem Kreise A zugeordnete Punkt im Raume ist, so entsprechen den reellen auf A liegenden (doppelt zu denkenden) Punkten im Raume die Punkte der Curve, in welcher die Polarebene von a in Bezug auf F letztere Fläche schneidet. Die Schnittcurve ist reell oder imaginär, je nachdem a ausserhalb oder innerhalb der Fläche F liegt, woraus hervorgeht, dass den reellen eigentlichen Kreisen in der Ebene sämmtliche Punkte ausserhalb F, den Kreisen mit reellem Mittelpunkt und rein imaginärem Halbmesser dagegen die Punkte innerhalb F entsprechen.

Kreisen, welche sich berühren, entsprechen im Raume Punkte, deren Verbindungslinie die Fläche F berührt (§ 36, zweiter Zus.).

Durch Anwendung dieses Satzes lassen sich alle Aufgaben und Sätze über Berührung von Kreisen in der Ebene in Aufgaben und Sätze umwandeln, welche der Raumgeometrie angehören. Das Berührungsproblem des Apollonius z. B. verwandelt sich in folgende Aufgabe: Es ist eine reelle elliptische Fläche zweiten Grades und ein Dreieck gegeben, dessen Ecken ausserhalb der Fläche liegen; man soll einen Punkt derart finden, dass seine Verbindungslinien mit den Ecken des gegebenen Dreiecks die gegebene Fläche berühren.

Mit Hilfe der Entwicklungen dieses Paragraphen können überhaupt alle Sätze und Aufgaben über Kreise auf den Raum übertragen und umgekehrt aus Sätzen der Raumgeometrie solche über Kreise in der Ebene abgeleitet werden.

Wenn man auf die Fläche F als „absolute Fläche“ oder Fundamentalfläche eine projectivische Massbestimmung gründet (vergl. die erwähnten Abhandlungen von Cayley und Klein), so wird wegen des Satzes § 36, bis auf eine Constante die Entfernung zweier Punkte im Raum gleich dem Bogen des Winkels, welchen die jenen Punkten zugeordneten Kreise in der Ebene einschliessen. Es lässt sich also jeder Satz über Schnittwinkel von Kreisen in der Ebene in einen metrischen Satz der Nicht-Euklidischen Raumgeometrie verwandeln und umgekehrt.

Abschnitt V.

Vermischte Anwendungen.

§ 38.

Satz. Wenn n gegebene Kreise $A_1, A_2 \ldots A_n$ linear abhängig sind, so ist stets, wie man auch n Kreise $B_1, B_2 \ldots B_n$ annehmen möge, die Determinante

$$\Sigma \pm A_1 B_1 \,.\, A_2 B_2 \ldots\ldots A_n B_n = o.$$

Beweis. Die zwischen den Kreisen A_1, $A_2 \ldots A_n$ bestehende lineare Beziehung sei

$$\alpha_1 \; A_1 + \alpha_2 \; A_2 + \ldots\ldots + \alpha_n \; A_n = o.$$

Multiplicirt man diese Gleichung der Reihe nach mit $B_1, B_2 \ldots B_n$, so ergibt sich

$$\begin{array}{l}
\alpha_1 \,.\, A_1 B_1 + \alpha_2 \,.\, A_2 B_1 + \ldots + \alpha_n \,.\, A_n B_1 = o \\
\alpha_1 \,.\, A_1 B_2 + \alpha_2 \,.\, A_2 B_2 + \ldots + \alpha_n \,.\, A_n B_2 = o \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_1 \,.\, A_1 B_n + \alpha_2 \,.\, A_2 B_n + \ldots + \alpha_n \,.\, A_n B_n = o.
\end{array}$$

Damit diese Gleichungen neben einander bestehen, muss, wie im Satze behauptet ist, die Determinante

$$\begin{vmatrix}
A_1 B_1 & A_2 B_1 & \ldots & A_n B_1 \\
A_1 B_2 & A_2 B_2 & \ldots & A_n B_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_1 B_n & A_2 B_n & \ldots & A_n B_n
\end{vmatrix}$$

verschwinden.

Aus diesem Satze lassen sich eine grosse Anzahl specieller Folgerungen ziehen und die Auflösungen einer ganzen Reihe von Problemen können auf denselben zurückgeführt werden. Es ist nicht unsere Absicht, hierauf näher einzugehen, es möge vielmehr nur auf zwei hierher gehörige Abhandlungen von Darboux*) und Frobenius**) verwiesen

*) Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace; Annales de l'Ecole Normale, IIe sér. t. I, 1872.

**) Anwendungen der Determinantentheorie auf die Geometrie des Maasses, Crelle's Journal Bd. 79.

werden. Der erste Theil der letzteren z. B. besteht grösstentheils aus Anwendungen und Umformungen dieses Satzes, oder wenigstens des entsprechenden, welcher für Kreise einer Kugeloberfläche gilt.

§ 39.

Die Kreise (A—B) und (A + B) und ihre Eigenschaften.

Es seien A und B reelle eigentliche Kreise, beide vom Gewicht 1. Wir wollen die Eigenschaften der Kreise (A—B) und (A + B) untersuchen.

Sei zunächst X ein beliebiger Kreis vom Gewicht 1, der zu (A—B) normal ist, also

$$X(A-B) = 0. \qquad \text{(S. § 14.)}$$

Hieraus folgt

$$XA = XB$$

und umgekehrt folgt aus dieser Gleichung wieder die erste. In Worten: Jeder Kreis X, welcher zu (A—B) normal ist, liefert mit A und B gleiche Producte, und umgekehrt, alle Kreise, welche mit A und B gleiches Product geben, sind zu (A—B) normal. Insbesondere wird also (A—B) von allen reellen eigentlichen Kreisen und Geraden senkrecht geschnitten, welche mit A und B gleiche Winkel einschliessen. Zu jenen Geraden gehören u. A. auch die gemeinschaftlichen äusseren Tangenten von A und B; der Schnittpunkt derselben, der äussere Aehnlichkeitspunkt, ist daher der Mittelpunkt von (A—B). Da überdies (A—B) seiner Form nach dem Büschel (A, B) angehört, so ist jener Kreis identisch mit dem von Steiner so genannten „äusseren Potenzkreis“ (S. Crelle's Journal, Bd. I, Seite 175). Auf ähnliche Weise ergiebt sich für den Kreis (A + B), dass er von allen reellen eigentlichen Kreisen und Geraden senkrecht geschnitten wird, die A und B unter supplementären Winkeln schneiden und umgekehrt; ferner dass er den inneren Aehnlichkeitspunkt von A und B zum Mittelpunkt hat, kurz dass er mit dem Steiner'schen „inneren Potenzkreis“ von A und B zusammenfällt.

Die Potenzkreise (A + B) und (A — B) halbiren die von A und B gebildeten Winkel, falls letztere Kreise sich reell schneiden; denn es ist

$$A(A + B) = B(A + B)$$

$$(= 1 + AB, \text{ da } AA = BB = 1), \qquad \text{(§ 10.)}$$

und ebenso

$$A(A-B) = -B(A-B) \quad (= 1 - AB)$$

Ferner sind die beiden Potenzkreise normal zu einander, denn man hat

$$(A + B)(A - B) = 1 - 1 = o.$$

Wenn A und B gerade Linien sind, so fallen $(A + B)$ und $(A - B)$ mit den Halbirungslinien der von A und B gebildeten Winkel zusammen.

Berühren sich die Kreise A und B von aussen, so geht $(A + B)$ in ihren (doppelt zu denkenden) Berührungspunkt über. Denn es ist alsdann

$$AB = -1, \qquad (\S\ 11.)$$

folglich

$$(A + B)(A + B) = AA + 2\,AB + BB = o,$$

d. h. der Kreis $(A + B)$ artet, da er jedenfalls reelle Form hat und sein Product mit sich selbst verschwindet, in einen Doppelpunkt aus (§§ 7, 8). Ferner ist

$$A\,(A + B) = 1 - 1 = o \qquad \text{und}$$
$$B\,(A + B) = -1 + 1 = o,$$

d. h. der Punkt $(A + B)$ liegt gleichzeitig auf A und B, kann also nur ihr Berührungspunkt sein. Ebenso wird gezeigt, dass wenn A und B sich von innen berühren, $(A - B)$ ihr Berührungspunkt ist.

§ 40.

Die Plücker'sche Construction des Berührungskreises zu drei gegebenen Kreisen.

Es liegt nicht in unserer Absicht, hier auf das schon so vielfach behandelte Berührungsproblem des Apollonius näher einzugehen. Nur um die Anwendbarkeit der im ersten und zweiten Abschnitt entwickelten Methoden auch auf diesem Gebiete zu zeigen, soll die Plücker'sche Construction des genannten Problems, wohl die einfachste von allen, abgeleitet werden.

Es seien A, B, C die gegebenen, X einer der sie gemeinschaftlich berührenden Kreise. Wir denken uns alle mit dem Gewicht 1 versehen. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir an, X berühre die gegebenen Kreise gleichartig. Dann muss X die äusseren Potenzkreise je zweier der gegebenen Kreise, also die Kreise

$$(A - B),\ (B - C),\ (C - A)$$

senkrecht schneiden (§ 39).

Nun ist aber

$$(A - B) + (B - C) + (C - A) = o,$$

d. h. diese drei Kreise gehören demselben linearen Büschel an (§ 27). Mithin schneiden alle Kreise dieses Büschels den Kreis X senkrecht (§ 27 Zus.). Es giebt aber in jenem linearen Büschel einen einzigen Kreis A_1, welcher zu A normal ist (§ 21 Zus., § 22), also A senkrecht schneidet, wenn er reell ist. Für denselben wird daher

$$A_1 A = o, \quad A_1 X = o,$$

folglich auch

$$A_1 (A \pm X) = o,$$

d. h. der Kreis A_1 geht durch den Berührungspunkt $(A \pm X)$ von X mit A. (Das eine oder andere Zeichen gilt, je nachdem sich A und X ausschliessend oder einschliessend berühren.) Somit ergiebt sich folgende, von Plücker herrührende Construction (S. Crelle's Journal, Bd. X, S. 298).

Man construire drei Kreise A_1, B_1, C_1, welche in dem durch die äusseren Potenzkreise von A, B, C gebildeten linearen Büschel liegen und resp. zu den Kreisen A, B, C normal sind. Wenn sie reell sind, so schneiden sich A und A_1, B und B_1, C und C_1 zusammen in sechs Punkten, welche die Berührungspunkte der zwei die gegebenen Kreise gleichartig berührenden Kreise sind. Die ungleichartig berührenden Kreise werden auf ähnliche Weise gefunden, indem man die äusseren Potenzkreise theilweise durch die inneren ersetzt.

Diese Construction versagt nie, im Gegensatz zur Gergonne'schen, welche z. B. unbrauchbar wird, wenn die Mittelpunkte der gegebenen Kreise in gerader Linie liegen.

§ 41.

Anzahl der reellen gemeinschaftlichen Berührungskreise zu drei gegebenen Kreisen.

Aus der Plücker'schen Construction der acht Berührungskreise zu drei gegebenen Kreisen lässt sich sehr leicht ein Verfahren ableiten, um zu entscheiden, wie viele und welche von den acht Kreisen reell sind.

Betrachten wir zunächst die beiden A, B und C gleichartig berührenden Kreise. Ob diese Kreise reell sind oder nicht, hängt davon ab, ob die bei der Auflösung verwendeten Hilfskreise A_1, B_1, C_1 (S. § 40) reell sind oder nicht; es genügt aber schon die Betrachtung eines einzigen dieser Kreise. Nehmen wir z. B. den Kreis A_1. Derselbe liegt in dem

Büschel der äusseren Potenzkreise $(B - C)$ und $(C - A)$, ist also in der Form darstellbar

$$\varrho A_1 = \alpha (B - C) + \beta (C - A) \qquad (\S\ 26 \text{ Zus.}).$$

Durch Multiplication dieser Gleichung mit A erhält man, da $A A_1$ nach der Annahme gleich Null ist,

$$o = \alpha (AB - AC) + \beta (AC - AA)$$

oder

$$\alpha : \beta = (AA - AC) : (AB - AC).$$

Man kann also setzen

$$\varrho A_1 = (AA - AC)(B - C) + (AB - AC)(C - A).$$

Nun ist leicht zu zeigen, wenn man A_1 vom Gewicht 1 annimmt, dass ϱ reell oder rein imaginär wird, je nachdem A_1 ein reeller Kreis oder ein Kreis mit reellem Mittelpunkt und rein imaginärem Halbmesser ist. Denn multiplicirt man die vorhergehende Gleichung mit U, so erhält man auf der rechten Seite Reelles, also muss auch $\varrho . A_1 U$ reell sein; d. h., da $A_1 U$ den reciproken Halbmesser von A_1 vorstellt (§ 10), es muss ϱ gleichzeitig mit dem Halbmesser von A_1 reell oder rein imaginär sein.

Multiplicirt man die obige Gleichung mit sich selbst, so erhält man nach sehr leichter Umformung und mit Benützung von

$$AA = BB = CC = 1,$$

$$\varrho^2 . A_1 A_1 = 2\ (1 - BC)(1 - CA)(1 - AB).$$

Berühren sich zwei der gegebenen Kreise einschliessend, so verschwindet die rechte Seite und wenn umgekehrt die rechte Seite Null wird, so müssen sich nothwendig irgend zwei der gegebenen Kreise von innen berühren. In diesem Fall ist, da alsdann $A_1 A_1 = o$, A_1 ein auf A liegender Doppelpunkt und man erhält zwei reelle, aber zusammenfallende Lösungen. In jedem anderen Falle ist $A_1 A_1 = 1$ zu setzen und man hat

$$\frac{\varrho^2}{2} = (1 - BC)(1 - CA)(1 - AB),$$

wo also ϱ^2 positiv oder negativ wird, je nachdem A_1 reell ist oder nicht. Das Kriterium für das Vorhandensein der gleichartig berührenden Kreise ist daher folgendes:

Es sind zwei reelle getrennte, oder zwei reelle zusammenfallende

Berührungskreise vorhanden, oder dieselben werden imaginär, je nachdem das Product

$$(1 - BC)(1 - CA)(1 - AB)$$

positiv, oder Null, oder negativ ist.

Man findet auf dieselbe Weise, dass die entscheidende Function für das Vorhandensein derjenigen beiden Berührungskreise, welche B und C gleichartig, dagegen B und A sowie C und A ungleichartig berühren, folgende ist:

$$(1 - BC)(1 + CA)(1 + AB),$$

ferner für die beiden übrigen Kreispaare, welche allein C und A resp. A und B gleichartig berühren:

$$(1 + BC)(1 - CA)(1 + AB)$$

und

$$(1 + BC)(1 + CA)(1 - AB).$$

Für die Anwendung obiger Kriterien ist Folgendes zu wissen nöthig. Wenn zwei reelle eigentliche Kreise K und K_1 vom Gewicht 1 gegeben sind, so ist

$$K K_1 > 1,$$

wenn K und K_1 ineinander liegen;

$$K K_1 < +1$$
$$> -1,$$

wenn K und K_1 sich schneiden;

$$K K_1 < -1,$$

wenn K und K_1 ganz ausser einander liegen. (Denn liegen z. B. K und K_1 ausser einander und bezeichnen r und r_1 ihre Halbmesser, d die Entfernung ihrer Mittelpunkte, so hat man

$$r + r_1 < d \qquad \text{also}$$

$$r^2 + 2rr_1 + r_1^2 < d^2 \qquad \text{oder}$$

$$K K_1 \equiv \frac{r^2 + r_1^2 - d^2}{2rr_1} < -1 \qquad \text{u. s. w.}).$$

Die hier abgeleiteten Kriterien stimmen im Wesentlichen überein mit den von Herrn Stoll in einer Abhandlung, betitelt „zum Problem des Apollonius“ (Math. Annalen Bd. VI. S. 613) gegebenen. Jedoch enthalten die von Herrn Stoll aufgestellten Discriminanten überflüssige Factoren.

§ 42.

Ein Schliessungsproblem von Steiner.

Steiner beweist im ersten Bande von Crelle's Journal (S. 256) folgenden Satz:

Wenn zwei in einander liegende Kreise gegeben sind und man beschreibt in den zwischen beiden liegenden Theil der Ebene eine Reihe von Kreisen, von welchen jeder die beiden gegebenen ungleichartig berührt und welche einander in der Ordnung nacheinander berühren, so schliesst diese Reihe immer bei beliebigem Anfangskreise, wenn sie einmal schliesst.

Wir wollen untersuchen, welche gegenseitige Lage die gegebenen Kreise haben müssen, damit die genannte Reihe von Kreisen schliesst.

Die gegebenen Kreise mögen A und B heissen. Es ist nicht wesentlich, dass sie in einander liegen, um jedoch einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir an, dass A von B umschlossen (aber nicht berührt) werde. Sei X ein beliebiger zwischen A und B liegender und von beiden ungleichartig berührter Kreis, dessen Gewicht wir, wie das der Kreise A und B, gleich 1 annehmen. Dann ist

$$AX = -1, \quad BX = +1,$$

also

$$X(A + B) = o.$$

Da aber auch

$$(A - B)(A + B) = o,$$

so liegt der Kreis (A — B) mit allen Kreisen X in demselben Netz, dessen Orthogonalkreis (A + B) ist. Man setze

$$\varrho\, C = A - B,$$

wo C das Gewicht 1 haben soll. Durch Multiplication der letzten Gleichung mit sich selbst erhält man

$$\varrho^2\, CC = AA - 2\, AB + BB \qquad \text{oder}$$

(da

$$AA = BB = CC = 1)$$

$$\varrho^2 = 2\,(1 - AB) = 4 \sin^2 \frac{\gamma}{2},$$

wo γ den von A und B gebildeten (in unserem Falle imaginären) Winkel bezeichnet. Man nenne Y denjenigen Kreis des linearen Büschels (C, X), welcher C senkrecht schneidet und versehe ihn mit dem Gewicht 1.

Weil derselbe auch im Netz der X liegt, also gleichzeitig $YC = 0$, oder

$$Y(A - B) = 0, \text{ und } Y(A + B) = 0$$

ist, so hat man

$$YA = 0, \; YB = 0,$$

d. h. Y schneidet A und B, also überhaupt jeden Kreis des Büschels (A, B) senkrecht (§ 27 Zus.). Alle Kreise Y, welche den verschiedenen möglichen Lagen von X entsprechen, bilden daher einen linearen Büschel. (§ 22 Zus.) Setzt man

$$X = cC + yY,$$

so müssen c und y der Bedingung genügen

$$1 = c^2 + y^2.$$

(Denn es ist

$$XX = 1 = c^2 \,.\, CC + 2cy \,.\, CY + y^2 \,.\, YY = c^2 + y^2,$$

weil $CC = YY = 1, \; CY = 0$).

Man kann daher einen Hilfswinkel φ einführen, der durch die Gleichungen bestimmt ist:

$$\cos\varphi = c, \; \sin\varphi = y.$$

Der Winkel φ ist für alle Kreise X derselbe. Denn multiplicirt man die Gleichung

$$X = \cos\varphi \; C + \sin\varphi \; Y$$

mit C, so folgt

$$XC = \cos\varphi.$$

Es ist aber

$$XC = \frac{X(A-B)}{\varrho} = \frac{-2}{2\sin\frac{\gamma}{2}},$$

also

$$XC = \cos\varphi = -\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \text{const.}$$

Es sei jetzt X_0 das ganz beliebige Anfangsglied einer Reihe, in welcher jeder Kreis den folgenden und vorhergehenden berührt, X_1 der auf X_0 folgende Kreis und Y, Y_1 seien die ihnen im Büschel der Y entsprechenden Kreise. Dann ist

$$X_0 = \cos\varphi \; C + \sin\varphi \; Y_0$$
$$X_1 = \cos\varphi \; C + \sin\varphi \; Y_1.$$

Durch Multiplication beider Gleichungen ergiebt sich

$$X_0 X_1 = -1 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \,.\, Y_0 Y_1$$
$$(C Y_0 = C Y_1 = o,\ C C = 1).$$

Hieraus folgt, wenn man den von Y_0 und Y_1 eingeschlossenen Winkel mit α bezeichnet:

$$Y_0 Y_1 = \cos\alpha = -\frac{1+\cos^2\varphi.}{\sin^2\varphi}$$

Es hat also α einen constanten Werth, oder je zwei auf einander folgende Kreise in der Reihe der Y schliessen einen constanten Winkel ein. Durch Umformung der vorhergehenden Gleichung erhält man mit Rücksicht auf den Werth von φ

$$\sin\frac{\alpha}{2} = i \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{(a-b)^2 - d^2}{(a+b)^2 - d^2},$$

wo a und b die Halbmesser von A und B bedeuten, d ihren Centralabstand bezeichnet. Die Kreise X und Y entsprechen sich eindeutig, so dass, wenn von X_0 an gerechnet der n te Kreis in der Reihe der X wieder mit dem ersten zusammenfällt, auch der n te auf Y_0 folgende Kreis in der Reihe der Y mit Y_0 zusammenfallen muss und umgekehrt.

Letzteres ist aber, da die Kreise Y durch dieselben zwei Punkte gehen, offenbar dann und nur dann der Fall, wenn $n \,.\, \alpha$ ein ganzes Vielfaches von 2π ist. Man hat also den Satz:

Ist der aus der Gleichung

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{(a-b)^2 - d^2}{(a+b)^2 - d^2}$$

bestimmte Winkel α in einem ganzen Vielfachen von 2π n mal enthalten, so schliesst die Reihe der Kreise X, welche Lage das Anfangsglied derselben auch haben möge, indem stets der n te Kreis mit dem ersten zusammenfällt. Sind dagegen α und π incommensurabel, so schliesst die Reihe nie.

§ 43.

Fortsetzung.

Es mögen noch einige leicht sich ergebende Eigenschaften der Figur hinzu gefügt werden.

Die gegenseitigen Berührungspunkte der Kreise X liegen auf einem und demselben Kreise im Büschel (A, B), nämlich auf (A + B).

Denn es folgt z. B. aus

$$X_0 (A + B) = o \qquad \text{und}$$
$$X_1 (A + B) = o$$
$$(X_0 + X_1)(A + B) = o, \qquad \text{d. h.}$$

$(X_0 + X_1)$, der Berührungspunkt von X_0 und X_1, liegt auf (A + B).

P und Q seien die beiden Doppelpunkte des Büschels (A, B). Jeder dieselben enthaltende Kreis schneidet A sowohl als B senkrecht (§ 27 Zus.). Man lege durch P und Q ein System von Kreisen D der Art, dass D_k den Kreis X_k senkrecht schneidet ($k = o, 1, 2 \ldots.$). Es geht alsdann D_k durch die Berührungspunkte von X_k mit A und B; denn aus

$$D_k A = o; D_k B = o, D_k X_k = o$$

folgt

$$D_k (A + X_k) = o, D_k (B - X_k) = o,$$

was der analytische Ausdruck für den eben ausgesprochenen Satz ist. D_k schneidet C und X_k senkrecht, also auch den Kreis Y_k, weil derselbe sich im linearen Büschel (C, X_k) befindet. Daher schliessen je zwei Kreise D denselben Winkel ein, wie die mit demselben Index versehenen Y.

Also: Die Kreise D, welche durch die festen Punkte P und Q und die Berührungspunkte der Kreise X mit A und B gehen, bilden unter einander gleiche Winkel.

Wir führen noch ein System von Kreisen E ein, definirt durch die Gleichung

$$2 E_k = X_{k+1} - X_k.$$

Wie das Produkt dieser Gleichung mit sich selbst ergiebt, hat E_k das Gewicht 1. Durch Multiplication der obigen Gleichung mit A oder B zeigt sich unmittelbar, dass sämmtliche Kreise E die Kreise A und B senkrecht schneiden, also durch P und Q gehen. Es folgt weiter aus der Definitionsgleichung, dass E_k durch den Berührungspunkt von X_k mit X_{k+1} geht und beide Kreise in diesem Punkt berührt (weil E_k in dem Büschel (X_k, X_{k+1}) liegt). Aus letzterem Grunde ist z. B.

$$E_{k-1} X_k = \mp 1, E_k X_k = \mp 1,$$

also

$$(E_{k-1} + E_k) X_k = o.$$

Es ist aber auch

$$D_k X_k = o.$$

Daher und weil überdies die Kreise D und E demselben linearen Büschel angehören, fällt D_k mit $(E_{k-1} + E_k)$ zusammen, d. h. der Kreis D_k halbirt den Winkel der beiden Kreise E_{k-1} und E_k (S. § 39). Multiplicirt man die Gleichung

$$X_k = \cos\varphi\ C + \sin\varphi\ Y_k$$

mit E_k, so kommt, da $E_k C = o$,

$$\mp 1 = \sin\varphi\ .\ E_k Y_k$$ oder

$$E_k Y_k = \mp \frac{1}{\sin\varphi} = \text{const.},$$ d. h.

der von E_k und Y_k gebildete Winkel ist constant. Daher schliessen je zwei aufeinanderfolgende Kreise E, ebenso wie es bei den Kreisen Y der Fall ist, einen constanten Winkel, den Winkel α ein.

Es ist leicht, X_n als Function der Zahl n und constanter Kreise darzustellen. Denn es war

$$X_n = \cos\varphi\ C + \sin\varphi\ Y_n.$$

Bezeichnet man aber mit $\overline{Y}$ denjenigen (mit dem Gewicht 1 versehenen) Kreis im Büschel der durch P und Q gehenden Kreise, welcher Y_0 senkrecht schneidet, so hat man (da Y_0 und Y_n den Winkel $n\ .\ \alpha$ einschliessen),

1) $$Y_n = \cos n\alpha\ .\ Y_0 + \sin n\alpha\ .\ \overline{Y},$$

eine Gleichung, deren Richtigkeit nachträglich durch Multiplication mit Y_n resp. Y_0 und $\overline{Y}$ leicht zu bestätigen ist. *)

---

*) Man kann zu dieser Gleichung auch auf folgendem merkwürdigen Wege gelangen. Da Y_{n+1} den Winkel der Kreise Y_n und Y_{n+2} halbirt, so hat man (§ 39)

$$\varrho\ Y_{n+1} = + Y_n + Y_{n+2}.$$

ϱ bestimmt sich durch Multiplication der Gleichung mit Y_{n+1}, nämlich

$$\varrho = 2\cos\alpha.$$

Daher ist

$$Y_{n+2} - 2\cos\alpha\ .\ Y_{n+1} + Y_n = o.$$

Dies ist eine Differenzengleichung in Bezug auf n als Veränderliche, von welcher ein partikuläres Integral nach bekannten Sätzen der Summenrechnung (Vergl. z. B. Boole, Differenzen- und Summenrechnung, Kap. 7, Nr. 5) die Form hat

$$K\ .\ u^n,$$

wo K constant und u aus der Gleichung zu bestimmen ist

$$u^2 - 2\cos\alpha\ .\ u + 1 = o.$$

Daher hat man

$$2)\quad X_n = \cos\varphi\, C + \sin\varphi\, (\cos n\alpha \,.\, Y_0 + \sin n\alpha \,.\, \overline{Y}).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit einem willkürlichen Kreise K, so kommt eine Gleichung der Form

$$3)\qquad X_n K = p + \cos n\alpha \,.\, q + \sin n\alpha \,.\, s,$$

wo p, q, s constante (d. h. nur von K, nicht von n abhängige) Zahlgrössen sind, nämlich

$$p = \cos\varphi \,.\, C K$$
$$q = \sin\varphi \,.\, Y_0 K$$
$$s = \sin\varphi \,.\, \overline{Y} K.$$

Es ist damit die Aufgabe gelöst, das Product des Kreises X_n mit einem beliebigen Kreise K durch die Zahl n und constante Grössen auszudrücken. Setzt man z. B. K = U, so erhält man eine Gleichung für den Halbmesser r_n von X_n in der Gestalt

$$r_n = \frac{1}{\overline{p} + \cos n\alpha \,.\, \overline{q} + \sin n\alpha \,.\, \overline{s}},$$

wo

$$\overline{p} = \cos\varphi \,.\, C U$$
$$\overline{q} = \sin\varphi \,.\, Y_0 U$$
$$\overline{s} = \sin\varphi \,.\, \overline{Y} U.$$

Gleichung 3) lässt sich noch auf eine andere Form bringen, indem man an Stelle der constanten Kreise C, Y_0, $\overline{Y}$ drei beliebige, als gegeben betrachtete Kreise aus der Reihe der X einführt. Seien X_k, X_l, X_m die gegebenen Kreise, so hat man vermöge Gl. 3)

Aus dieser Gleichung folgt

$$u = e^{\pm i\alpha}.$$

Also hat das vollständige endliche Intregal obiger Differenzengleichung die Gestalt

$$Y_n = K e^{i n\alpha} + L e^{-i n\alpha}.$$

oder auch

$$Y_n = M \cos n\alpha + N \sin n\alpha,$$

wo M und N constante Kreise sind. Setzt man n = o, so kommt

$$Y_0 = M.$$

Multiplicirt man die Gleichung mit Y_0, so ergiebt sich

$$Y_n Y_0 = \cos n\alpha = \cos n\alpha + N Y_0 \,.\, \sin n\alpha.$$

daher ist $N Y_0 = o$ oder da N in dem Büschel $(Y\, Y_0)$ liegt,

$$N = \overline{Y}.$$

$$X_m K = p + \cos m\alpha \,.\, q + \sin m\alpha \,.\, s$$
$$X_l K = p + \cos l\alpha \,.\, q + \sin l\alpha \,.\, s$$
$$X_k K = p + \cos k\alpha \,.\, q + \sin k\alpha \,.\, s.$$

Aus diesen Gleichungen zusammen mit 3) folgt aber

$$4) \quad \begin{vmatrix} X_n K & 1 & \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ X_m K & 1 & \cos m\alpha & \sin m\alpha \\ X_l K & 1 & \cos l\alpha & \sin l\alpha \\ X_k K & 1 & \cos k\alpha & \sin k\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

oder, wenn man die Determinante nach den Gliedern der ersten Colonne auflöst und $X_n K$ allein setzt:

$$5) \qquad X_n K = \alpha_k \,.\, X_k K + \alpha_l \,.\, X_l K + \alpha_m \,.\, X_m K,$$

wo

$$\alpha_k = \frac{\sin (n - m)\alpha - \sin (n - l)\alpha + \sin (m - l)\alpha}{\sin (k - m)\alpha - \sin (k - l)\alpha + \sin (m - l)\alpha}$$

u. s. w.

Man kann die α auch auf die Form bringen

$$\alpha_k = \frac{\cos (n - \frac{l + m}{2})\alpha - \cos \frac{m - l}{2}\alpha}{\cos (k - \frac{l + m}{2})\alpha - \cos \frac{m - l}{2}\alpha}$$

. . . .

$$\alpha_m = \frac{\cos (n - \frac{k + l}{2})\alpha - \cos \frac{l - k}{2}\alpha}{\cos (m - \frac{k + l}{2})\alpha - \cos \frac{l - k}{2}\alpha}$$

Gleichung 5) lehrt das Product eines beliebigen Kreises K mit X_n finden, wenn die Producte desselben Kreises mit drei beliebigen Kreisen X_k, X_l, X_m aus der Reihe der X gegeben sind. Je nachdem man über die Beschaffenheit und Lage des willkürlichen Kreises K verfügt, erhält man aus 5) interessante specielle Formeln. Man kann z. B. K eine Gerade, einen Doppelpunkt u. s. w. sein lassen und die Lage noch irgend wie specialisiren. Jedoch soll hierauf nicht weiter eingegangen werden. Es ist zu bemerken, dass alle vorhergehenden Entwickelungen im Ganzen dieselben blieben, wenn die Kreise A und B statt in einander, ausser einander lägen und dass sie auch nicht wesentlich geändert würden, wenn den Kreisen X, statt sich gegenseitig und die Kreise A und B zu berühren, ein Schneiden unter gegebenen Winkeln auferlegt würde.

§ 44.

Ein von Pappus überlieferter Satz und eine Aufgabe von Steiner.

Die Entwickelungen des vorigen Paragraphen werden theilweise illusorisch und bedürfen deshalb einiger Abänderungen, wenn sich die gegebenen Kreise A und B berühren, weil dann (A — B) in einen Doppelpunkt, den Berührungspunkt von A und B ausartet. Wir wiederholen für diesen speciellen Fall die Lösung der im vorhergehenden Paragraphen behandelten Aufgabe: Wenn, wie bei den vorhergehenden Problemen eine Reihe von Kreisen X_0, $X_1 \ldots . X_n$ die gegebenen Kreise A und B ungleichartig und zugleich je zwei aufeinander folgende Kreise X sich von aussen berühren, den Kreis X_n als Function der Zahl n mit Hilfe fester Kreise darzustellen. Diese Aufgabe ist die Verallgemeinerung einer von Steiner gestellten *), aber nicht gelösten, welche in unserer Ausdrucksweise lauten würde: Das Product des Kreises X_n mit einer beliebigen Geraden **) durch n und constante Grössen auszudrücken, und diese wiederum ist aus der Verallgemeinerung eines von Steiner mitgetheilten ***) und von Pappus überlieferten, nach seiner Angabe »sehr alten« Satzes hervor gegangen. Was den soeben erwähnten Satz betrifft, so soll der Beweis dafür wegen seiner grossen Einfachheit unabhängig vom allgemeineren Satze zuerst gegeben werden.

Setzt man

$$X_1 - X_0 = \varrho \, . \, E,$$

so ist E ein Kreis, welcher X_0 und X_1 in ihrem Berührungspunkt berührt, sowie durch den Berührungspunkt C von A und B geht und letztere beiden Kreise senkrecht schneidet, also von dem durch C gehenden Durchmesser G von A berührt wird. Multiplicirt man obige Gleichung mit X_0, so kommt, vorausgesetzt dass E das Gewicht 1 hat,

$$\varrho = 2\,\varepsilon,$$

wo $\varepsilon = \pm 1,$ je nachdem X_0 von E ausschliessend oder einschliessend berührt wird. Also ist

$$X_1 - X_0 = 2\,\varepsilon\, E.$$

*) „Geometrische Betrachtungen", Crelle's Journal, Bd. I, S. 264.

**) Merkwürdiger Weise wird die Grösse, welche wir nothwendig als Product eines Kreises und einer Geraden bezeichnen müssen, von Steiner Quotient des Kreises in Bezug auf die Gerade genannt. S. a. a. O. Seite 277.

***) A. a. O. Seite 260.

Nimmt man G vom Gewicht 1 und von solcher Richtung, dass

$$E\,G = +1$$ wird,

so ergiebt sich durch Multiplication der obigen Gleichung mit G

$$X_1\,G - X_0\,G = 2\,\varepsilon.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung findet man

$$X_n\,G = 2\,\varepsilon\,.\,n + X_0\,G.$$

Dies ist der Satz des Pappus.

Nicht viel schwerer ist es, den allgemeinsten Ausdruck für X_n aufzustellen. Es bringt formal einige Vereinfachung hervor, wenn man sich hierbei der Bezeichnungsweise und Methode der Differenzenrechnung bedient. Man setze:

$$\triangle\,X_n = X_{n+1} - X_n = \varrho\,E_n,$$

wo E_n das Gewicht 1 haben soll.

Durch Multiplication der Gleichung mit E_n folgt

$$\varrho = 2\,\varepsilon,$$

wenn

$$\varepsilon\,(= \pm\,1) = X_{n+1}\,E_n = -\;X_n\,E_n$$ ist, also

$$X_n = 2\;\varepsilon\;E_n.$$

Hieraus erhält man

$$\triangle^2\,X_n = \triangle\,X_{n+1} - \triangle\,X_n = 2\,\varepsilon\,(E_{n+1} - E_n).$$

Weil E_{n+1} und E_n sich im Punkte C einschliessend berühren, so ist $(E_{n+1} - E_n)$ bis auf das Gewicht mit C oder (A — B) identisch, d. h. man hat

$$\triangle^2\,X_n = 2\,\varepsilon\,(E_{n+1} - E_n) = \sigma\,(A - B).$$

Um σ zu bestimmen, multiplicire man diese Gleichung mit X_{n+1}. Man erhält

$$-\,4\,\varepsilon^2 = -\,4 = 2\,\sigma,\ \sigma = -\,2,$$ also

$$\triangle^2\,X_n = -\,2\,(A - B).$$

Durch endliche Integration nach der Veränderlichen n folgt hieraus

$$1)\quad X_n = -\,n\,(n-1)\,(A - B) + n\,.\,\triangle\,X_0 + X_0,$$

welches die gesuchte Gleichung ist.

Man kann derselben noch eine andere Gestalt geben. Es sei D derjenige Kreis vom Gewicht 1, welcher durch die Berührungspunkte von X_0 mit A und B geht, sowie A und B senkrecht schneidet. Der-

selbe geht durch C und berührt in diesem Punkte sämmtliche Kreise E. (Vergl. § 43.) Daher ist bis auf das Gewicht $(E_0 - D)$ mit $(A - B)$ identisch. Also

$$E_0 - D = \tau (A - B).$$

Der Factor τ wird gefunden, wenn man die Gleichung mit X_0 multiplicirt. Es ergiebt sich

$$-\varepsilon = 2\tau,$$ also wird

$$E_0 = D - \frac{\varepsilon}{2} (A - B).$$

Setzt man dies in Gl. 1) ein, indem man berücksichtigt, dass

$$\triangle X_0 = 2 \varepsilon E_0,$$

so findet man

2) $$X_n = n^2 (B - A) + 2 \varepsilon n D + X_0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit einem beliebigen Kreise K, so kommt

3) $$X_n K = n^2 . (BK - AK) + 2 \varepsilon n . DK + X_0 K,$$

eine Gleichung, welche die Aufgabe löst, das Product eines Kreises K mit X_n als Function von n und constanten Grössen darzustellen.

Setzt man z. B. an Stelle von K den Durchmesser L von A, welcher durch den Mittelpunkt von X_0 geht, also D berührt und X_0 sowie A senkrecht schneidet, so ergiebt sich wegen

$$DL = 1, \; LA = LX_0 = 0,$$

4) $$X_0 L = n^2 . BL + 2 \varepsilon n.$$

Dies ist die allgemeinste Formel, bis zu welcher Steiner beim vorliegenden Problem überhaupt gelangt. (S. a. a. O. Seite 269, Gl. 6.)

Gleichung 3) kann auf eine ähnliche Form wie 5) in § 43 gebracht werden, indem man statt der constanten Kreise $(B - A)$, D, X_0 drei beliebige von den Kreisen X, etwa X_k, X_l, X_m einführt. Man findet auf dieselbe Weise wie in § 43

$$\begin{vmatrix} X_n K & n^2 & n & 1 \\ X_m K & m^2 & m & 1 \\ X_l K & l^2 & l & 1 \\ X_k K & k^2 & k & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

5) $$X_n K = x_k . X_k K + x_l . X_l K + x_m . X_m K$$

wo
$$x_k = \frac{(n-l)(n-m)}{(k-l)(k-m)}$$
. . . .
$$x_m = \frac{(n-k)(n-l)}{(m-k)(m-l)}$$

Es würde uns zu weit führen, wenn wir auf die zahlreichen Anwendungen eingehen wollten, welche die Gleichungen 3) und 5) zulassen; es möge nur auf die Entwickelungen Steiner's in der angeführten Abhandlung auf S. 260 ff. hingewiesen werden. Uebrigens gelten hier dieselben Bemerkungen, wie am Schlusse von § 43.

§ 45.

Directe Anwendung der Differentialrechnung auf die Kreisgeometrie.

In zahlreichen Fällen ist es möglich, wie in den beiden folgenden Paragraphen gezeigt werden soll, die Differentialrechnung direct, d. h. ohne Zuhilfenahme eines Coordinatensystems, auf die Kreisgeometrie anzuwenden. Es ist nöthig, einige Bemerkungen hierüber vorauszuschicken.

Sei X ein veränderlicher Kreis, der aus den beliebigen Grundkreisen $A_1 \ldots A_4$ durch die Zahlen $x_1 \ldots x_4$ linear abgeleitet ist (S. § 13). Aendern sich die Coordinaten $x_1 \ldots x_4$ resp. um $dx_1 \ldots dx_4$ und ist dX die hierdurch hervorgerufene Aenderung des Kreises X, d. h. die Differenz des geänderten und des ursprünglichen Kreises, so hat man
$$dX = dx_1 A_1 + \ldots + dx_4 A_4.$$

Bei unbeschränkter Veränderlichkeit der x kann d X jeder beliebige Kreis sein; d X wird zu einem bestimmten Kreise, wenn X und mit ihm die x sich auf bestimmte Weise ändern.

Es ist ohne Weiteres klar, dass wenn α, β . . . Constanten bezeichnen,
$$d(\alpha X + \beta Y + \ldots) = \alpha\, dX + \beta\, dY + \ldots$$
ist. Ferner hat man den Satz:
$$d(XY) = dX\,Y + X\,dY.$$

Denn wenn $y_1 \ldots y_4$ die Coordinaten von Y sind, so ist (wie die Multiplication der Gleichungen für X und Y ergiebt)
$$XY = \sum_{ik} x_i y_k \,.\, A_i A_k.$$

Hieraus folgt

$$d(XY) = \sum_{ik} dx_i\, y_k \,.\, A_i A_k + \sum_{ik} x_i\, dy_k \,.\, A_i A_k$$
$$= dX\,Y + X\,dY.$$

(Vergl. A_2 Nr. 433.)

Insbesondere ist, wenn A ein constanter Kreis,

$$d(AX) = A\,dX.$$

§ 46.

Aufgabe.

Einen Kreis zu construiren, welcher zwei gegebene reelle eigentliche Kreise A und B berührt und dessen Product mit einem beliebigen dritten Kreise C ein Maximum oder Minimum ist.

Auflösung.

Es sei X der gesuchte Kreis. Wir denken uns denselben (wie die gegebenen Kreise A und B) mit dem Gewicht 1 versehen, so dass man hat

1) $$XX = 1.$$

Da X die Kreise A und B berühren soll, so muss sein

2) $$AX = \pm 1,\ BX = \pm 1.$$

Damit das Product CX ein Max. Min. werde, muss das erste Differential dieses Ausdrucks verschwinden, d. h. es ist

3) $$d(CX) = C\,dX = o.$$

Durch Differentiation der Gleichungen 1) und 2) erhält man aber

4) $$X\,dX = o$$

5) $$A\,dX = o,\ B\,dX = o.$$

Wie aus den Gleichungen 3) und 5) hervorgeht, ist dX der gemeinschaftliche Normalkreis der Kreise A, B und C und kann daher construirt werden. Aus 4) und 5) folgt endlich

6) $$(A \pm X)dX = o,\ (B \pm X)dX = o,$$

welche Gleichungen nichts anderes besagen, als dass dX durch die Berührungspunkte von X mit den Kreisen A und B hindurchgeht. Die Auflösung ist daher folgende:

Man construire den gemeinschaftlichen Normalkreis der gegebenen Kreise A, B, C. Derselbe schneidet, wenn er reell ist, A und B zusammen in vier Punkten, den Berührungspunkten von zwei Kreisen, welche den nothwendigen Bedingungen der Aufgabe genügen. Solange die Voraussetzungen der Aufgabe erfüllt sind, entsprechen die beiden Lösungen wirklich einem Maximum und Minimum, wie leicht nachzuweisen wäre.

Während A und B als reelle eigentliche Kreise vorausgesetzt sind, kann C jede beliebige Beschaffenheit haben (darf jedoch nicht mit A und B in einem linearen Büschel liegen). Ist speciell C ein reeller eigentlicher Kreis, welcher von allen, den Gleichungen 2) genügenden Kreisen X reell geschnitten wird, so schliessen die gefundenen Kreise mit C Winkel ein, deren cos ein Maximum resp. Minimum ist, also bilden von den Winkeln selbst der eine ein Maximum, der andere ein Minimum.

Für den Fall, dass C eine Gerade ist, hat Steiner die Aufgabe gelöst in der mehrfach citirten Abhandlung, Crelle's Journal, Bd. I, S. 258.

§ 47.

Aufgabe.

Einen Kreis X zu finden, welcher zwei gegebene eigentliche Kreise A und B auf vorgeschriebene Weise berührt und für welchen die Länge der gemeinschaftlichen (inneren oder äusseren) Tangente mit einem dritten eigentlichen Kreise C ein Maximum oder Minimum ist.

Auflösung.

Es ist zunächst unsere Aufgabe, die Länge der äusseren und inneren gemeinschaftlichen Tangente zweier eigentlichen Kreise K und K_1 durch das Product derselben auszudrücken. Seien r und r_1 die Halbmesser der Kreise K und K_1, welche wir uns mit dem Gewicht 1 versehen denken, also

$$r = \frac{1}{UK}, \quad r_1 = \frac{1}{UK_1} \qquad (§\ 10).$$

Bezeichnet d den Centralabstand von K und K_1, t_a resp. t_i die Länge der äusseren resp. inneren gemeinschaftlichen Tangente beider Kreise, so ist

$$t_a^2 = d^2 - (r - r_1)^2; \; t_i^2 = d^2 - (r + r_1)^2.$$

Nun hat man

$$KK_1 = \frac{r^2 + r_1^2 - d^2}{2\, r r_1}, \qquad (§\ 10)$$

folglich

$$t_a^2 = 2\, r\, r_1\, (1 - K K_1)\,;\; t_i^2 = -\, 2\, r\, r_1\, (1 + K K_1)$$

oder

$$1)\qquad t_a^2 = 2\, \frac{1 - K K_1}{U K \,.\, U K_1};\; t_i^2 = -\, 2\, \frac{1 + K K_1}{U K \,.\, U K_1}.$$

Bei der vorliegenden Aufgabe handelt es sich also darum, den Kreis X so zu bestimmen, dass die Grösse

$$\frac{1 + \gamma \,.\, X C}{U X \,.\, U C},\ \text{oder auch}\ \frac{1 + \gamma \,.\, X C}{U X}$$

ein Maximum oder Minimum wird, wo $\gamma = \pm 1$ zu setzen ist, je nachdem die innere oder äussere gemeinschaftliche Tangente in Betracht gezogen wird.

Obiger Ausdruck lässt sich noch passend umformen, indem man setzt

$$2)\qquad \bar{X} = \frac{X}{U X}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit X, so kommt, da $X X = 1$,

$$\bar{X} X = \frac{1}{U X},$$

folglich geht der zu betrachtende Ausdruck über in

$$\bar{X} X + \gamma \bar{X}\, C.$$

Das Differential desselben, welches im Falle eines Maximum oder Minimum verschwinden muss, ist

$$(d\bar{X}\, X + \gamma d\bar{X}\, C) + \bar{X}\, dX.$$

Das letzte Glied verschwindet jedoch, denn es ist wegen

$$X X = 1,$$

$$X\, dX = o, \qquad \text{also auch}$$

$$\frac{X\, dX}{U X} = \bar{X}\, dX = o.$$

Folglich hat man als analytische Bedingung der Aufgabe:

$$3)\qquad d\bar{X}\, X + \gamma\, d\bar{X}\, C = d\bar{X}\, (X + \gamma\, C) = o.$$

Es bedeute jetzt α (resp. β) die positive oder negative Einheit, je nachdem X den Kreis A (resp. B) von aussen oder innen berühren soll. Dann ist

$$X\, (X + \alpha A) = o,\; X\, (X + \beta\, B) = o,$$

denn diese Gleichungen drücken nichts weiter aus, als dass X durch seine Berührungspunkte mit A und B hindurchgeht. Man kann dieselben auch schreiben (indem man mit $\frac{1}{UX}$ multiplicirt),

$$\bar{X}\,(X + \alpha A) = o,\ \bar{X}\,(X + \beta B) = o.$$

Durch Differentiation ergiebt sich daraus

$$4)\qquad d\bar{X}\,(X + \alpha A) = o,\ d\bar{X}\,(X + \beta B) = o,$$

(Das Glied $\bar{X}\,dX$ verschwindet wie vorhin.)

Endlich liefert die Combination der Gleichungen 3) und 4)

$$5)\quad d\bar{X}\,(\beta B - \gamma C) = o,\ d\bar{X}\,(\gamma C - \alpha A) = o,\ d\bar{X}\,(\alpha A - \beta B) = o.$$

Die Gleichungen 4) und 5) haben einen höchst einfachen geometrischen Sinn. Zunächst ist zu bemerken, dass $d\bar{X}$ eine Gerade vorstellt, denn aus Gleichung 2) folgt durch Multiplication mit U

$$U\bar{X} = 1,$$

also durch Differentiation

$$U\,d\bar{X} = o,$$

d. h. $d\bar{X}$ ist in der That eine Gerade. Die Gleichungen 4) sagen aus, dass die Gerade $d\bar{X}$ durch die Berührungspunkte von X mit A und B hindurchgeht, und den Gleichungen 5) zufolge schneidet jene Gerade drei einem Büschel angehörige Potenzkreise von A, B, C senkrecht, d. h. sie geht durch drei Aehnlichkeitspunkte oder fällt mit einer der vier Aehnlichkeitsaxen von A, B, C zusammen. Also: Zieht man diejenigen beiden Aehnlichkeitsaxen der drei Kreise A, B, C, welche den $\left.\begin{matrix}\text{äusseren}\\ \text{inneren}\end{matrix}\right\}$ Aehnlichkeitspunkt von A und B enthalten, so schneiden dieselben die Kreise A und B in acht Punkten, den Berührungspunkten von zwei Paaren von Kreisen, welche A und B $\left.\begin{matrix}\text{gleichartig}\\ \text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ berühren. Diese Kreise erfüllen die nothwendige Bedingung, welche erforderlich ist, damit für das eine Paar die gemeinschaftliche äussere, für das andere die gemeinschaftliche innere Tangente mit dem Kreise C ein Maximum oder Minimum wird.

Es wäre nicht schwierig, die Bedingungen aufzustellen, unter welchen aus der Construction reelle, einem wirklichen Maximum oder Minimum entsprechende Kreise hervorgehen; jedoch würde uns eine Verfolgung des Problems in dieser Richtung zu weit führen, wesshalb wir darauf verzichten.

§ 48.

Construction der Summe mehrerer Kreise.

Es seien A_1, A_2 ... A_n beliebig gegebene Kreise und es handle sich darum, den Kreis

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

zu construiren. Um die Art des Kreises A zu ermitteln, hat man die in § 7 gegebenen Kriterien anzuwenden, wobei man benützen muss, dass (wie sich unmittelbar aus obiger Gleichung ergiebt)

$$A\,A = \sum_{k,l=1}^{n} A_k A_l,$$

$$A\,U = \sum_{k=1}^{n} A_k U$$

und wenn G eine beliebig Gerade,

$$A\,G = \sum_{k=1}^{n} A_k G$$

ist.

Wir nehmen an, man habe nach den angeführten Regeln bereits die Art des Summenkreises A bestimmt. Ehe wir an die Untersuchung der einzelnen Fälle selbst gehen, muss noch Einiges vorausgeschickt werden.

Ist K ein eigentlicher Kreis mit reellem Mittelpunkt M, dem Gewicht α und dem Halbmesser r; $\mathfrak{P}$ ein beliebiger (positiver) einfacher Punkt mit dem Gewicht 1 und stellen ϱ, φ die Länge und den Richtungswinkel der Strecke $M\mathfrak{P}$ vor, so ist nach § 10

$$K\mathfrak{P} = \alpha \frac{\varrho}{r} e^{i\varphi}$$

$$K\,U = \frac{\alpha}{r},$$

also

$$\frac{K\mathfrak{P}}{K\,U} = \varrho\, e^{i\varphi}.$$

Daher wird

$$-\frac{K\mathfrak{P}}{K\,U} \cdot U = -\varrho\, e^{i\varphi} \cdot U,$$

also gleich der Strecke von $\mathfrak{P}$ nach dem Mittelpunkt M von K (S. § 12).

Auf dieselbe Weise ergiebt sich: Wenn Q ein beliebiges Punktepaar bezeichnet, so ist

$$-\frac{Q\mathfrak{P}}{Q\,U} \cdot U$$

gleich der Strecke von $\mathfrak{P}$ nach dem positiven Punkt von Q, dagegen

$$-\frac{Q\,\mathfrak{P}}{Q\,U}\cdot U$$

gleich einer Strecke, welche zu der von $\mathfrak{P}$ nach dem negativen Punkt von Q gehenden Strecke conjugirt ist.

Ferner: Bedeutet G eine beliebige Gerade vom Gewicht α, so ist

$$i\,\frac{G\,\mathfrak{P}}{\alpha}\cdot U$$

eine Strecke von der Länge 1, welche zur positiven Richtung von G parallel ist.

Endlich: Ist $\mathfrak{Q}$ ein einfacher Punkt, P ein beliebiger Doppelpunkt mit dem Gewicht 1, L die in § 9 eingeführte feste Gerade, so wird

$$\frac{\mathfrak{Q}\,P}{\mathfrak{Q}\,L}\cdot U$$

gleich der Strecke von P nach $\mathfrak{Q}$ oder gleich der dazu conjugirten Strecke, je nachdem $\mathfrak{Q}$ ein positiver oder negativer einfacher Punkt ist.

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen gehen wir an die Erledigung der einzelnen Fälle.

a) Der Summenkreis A ist ein eigentlicher Kreis.

α sei das Gewicht, r der Halbmesser desselben. Man hat

$$\alpha = +\sqrt{A\,A} = +\sqrt{\left(\sum_{k,\,l=1}^{n} A_k\,A_l\right)}, \qquad (\S\ 9),$$

$$\frac{\alpha}{r} = A\,U = \sum_{k=1}^{n} A_k\,U \qquad (\S\ 10),$$

also

$$r = \frac{\sqrt{\left(\sum_{k,\,l=1}^{n} A_k\,A_l\right)}}{\sum_{k=1}^{n} A_k\,U}$$

Ist $\mathfrak{P}$ ein beliebiger einfacher Punkt mit dem Gewicht 1, so wird

$$A\,\mathfrak{P} = \sum_{k=1}^{n} A_k\,\mathfrak{P},$$

also

$$-\frac{A\,\mathfrak{P}}{A\,U}\cdot U = -\frac{\Sigma_k\,(A_k\,P\ .\ U)}{\Sigma_k\,A_k\,U}.$$

Man hat also nach den vorausgeschickten Bemerkungen zur Bestimmung des Mittelpunkts von A folgende Regel: Man construire die Strecke

$$S = -\frac{\Sigma_k (A_k \mathfrak{P} \, . \, U)}{\Sigma_k \; A_k U},$$

lege dieselbe, ohne ihre Richtung zu ändern, mit ihrem Anfangspunkt in den Hilfspunkt $\mathfrak{P}$, so bezeichnet in dieser Lage ihr Endpunkt den Mittelpunkt des gesuchten Kreises A.

Da $A_k \mathfrak{P} \, . \, U$ eine Strecke von bestimmter Länge und Richtung vorstellt (S. § 12) und $\Sigma \; A_k U$ eine Zahlgrösse ist, so kommt also die Construction der Strecke S und damit diejenige des Kreises A zurück auf die Addition von Strecken und die Multiplication derselben mit Zahlgrössen. Aehnliches gilt für alle übrigen Fälle.

b) A ist ein Punktepaar oder ein Doppelpunkt.

Ist α das Gewicht desselben, so hat man

$$\alpha = AU = \sum_{k=1}^{n} A_k U.$$

Unter Einführung eines Hilfspunktes P und seines conjugirten $\overline{\mathfrak{P}}$ erhält man wieder

$$-\frac{A\mathfrak{P}}{AU} \, . \, U = -\frac{\Sigma_k A_k \mathfrak{P} \, . \, U}{\Sigma_k A_k U},$$

$$-\frac{A\overline{\mathfrak{P}}}{AU} \, . \, U = -\frac{\Sigma_k \; A_k \overline{\mathfrak{P}} \, . \, U}{\Sigma_k \; A_k U},$$

woraus die Regel entspringt: Man construire die Strecke

$$S = -\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \mathfrak{P} \, . \, U}{\sum\limits_{k=1}^{n} A_k U},$$

und diejenige Strecke $\overline{S}$, welche zur Strecke

$$-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \overline{\mathfrak{P}} \, . \, U}{\sum\limits_{k=1}^{n} A_k U}$$

conjugirt ist, verlege den Anfangspunkt beider Strecken in den Punkt $\mathfrak{P}$, so bildet der Endpunkt von S den positiven, der Endpunkt von $\overline{S}$ den

negativen Punkt des gesuchten Punktepaares. Fallen S und $\overline{S}$ zusammen, so zeigt sich damit, dass A ein Doppelpunkt ist.

c) A ist eine Gerade.

Bezeichnet α das Gewicht derselben, so ist

$$\alpha = + \sqrt{A\,\overline{A}} = + \sqrt{\left(\sum_{k,l=1}^{n} A_k A_l\right)}. \qquad (\S\ 9).$$

Ferner ist

$$\frac{i}{\alpha} A \mathfrak{P} \,.\, U = i \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k \mathfrak{P} \,.\, U}{\sqrt{\left(\sum_{k,l=1}^{n} A_k A_l\right)}}, \qquad \text{also:}$$

Construirt man die Strecke

$$S = i \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k \mathfrak{P} \,.\, U}{\sqrt{\left(\sum_{k,l=1}^{n} A_k A_l\right)}},$$

so giebt deren Richtung die Richtung der gesuchten Geraden an. Ist P ein beliebiger Doppelpunkt mit dem Gewicht 1, der von der Geraden A den Abstand p haben möge, so wird

$$\alpha \,.\, p = A P = \Sigma_k A_k P, \qquad \text{oder}$$

$$p = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k P}{\sqrt{\left(\sum_{k,l=1}^{n} A_k A_l\right)}}.$$

Man kennt also jetzt von der gesuchten Geraden die Richtung und ihren (mit bestimmtem Vorzeichen behafteten) Abstand von einem festen Punkte, wodurch dieselbe vollkommen bestimmt ist.

d) A ist ein einfacher Punkt.

Ist α das Gewicht desselben, L die in § 9 eingeführte Gerade, welche zur Bestimmung des Gewichts der einfachen Punkte dient, so wird

$$\alpha = A L = \sum_{k=1}^{n} A_k L.$$

Um zu entscheiden, ob A ein positiver oder negativer Punkt ist, multiplicire man ihn mit einem beliebigen positiven einfachen Punkt $\mathfrak{P}$. Wird das Product

$$A \mathfrak{P} = \sum_{k=1}^{n} A_k \mathfrak{P}$$

Null, so ist A ein positiver, andernfalls ein negativer Punkt. Um den Punkt selbst zu finden, nehme man einen beliebigen Doppelpunkt P vom Gewicht 1 zu Hilfe und construire die Strecke

$$S = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k P \, . \, U}{\sum_{k=1}^{n} A_k L} \quad \left(= \frac{A P}{A L} \, . \, U\right).$$

Ist A ein positiver Punkt, so lege man S selbst, im entgegengesetzten Falle die zu S conjugirte Strecke mit ihrem Anfangspunkt in P, so bezeichnet ihr Endpunkt den gesuchten einfachen Punkt A.



